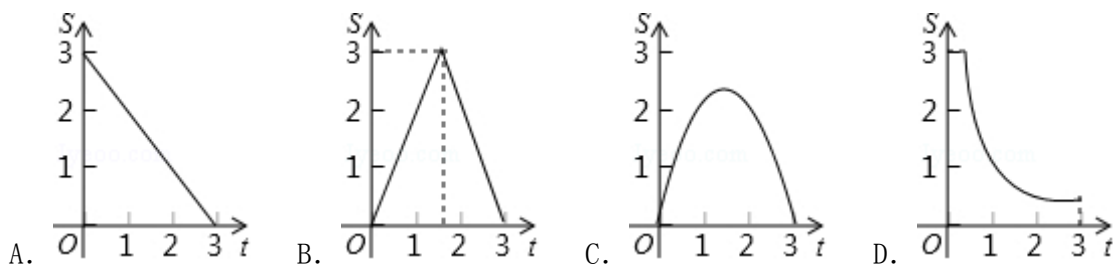
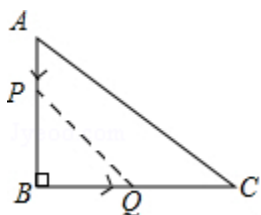


动态问题

一、选择题

1. (2018·湖北省孝感·3分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B=90^\circ$ ， $AB=3\text{cm}$ ， $BC=6\text{cm}$ ，动点P从点A开始沿AB向点B以 1cm/s 的速度移动，动点Q从点B开始沿BC向点C以 2cm/s 的速度移动，若P、Q两点分别从A、B两点同时出发，P点到达B点运动停止，则 $\triangle PBQ$ 的面积S随出发时间t的函数关系图象大致是()



【分析】根据题意表示出 $\triangle PBQ$ 的面积S与t的关系式，进而得出答案.

【解答】解：由题意可得： $PB=3-t$ ， $BQ=2t$ ，

$$\text{则}\triangle PBQ\text{的面积 } S = \frac{1}{2}PB \cdot BQ = \frac{1}{2}(3-t) \times 2t = -t^2 + 3t,$$

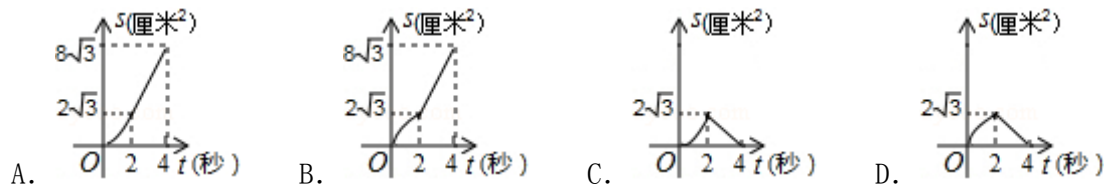
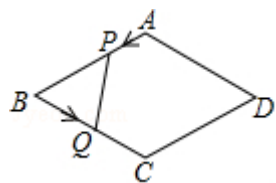
故 $\triangle PBQ$ 的面积S随出发时间t的函数关系图象大致是二次函数图象，开口向下.

故选：C.

【点评】此题主要考查了动点问题的函数图象，正确得出函数关系式是解题关键.

2. (2018·山东潍坊·3分) 如图，菱形ABCD的边长是4厘米， $\angle B=60^\circ$ ，动点P以1厘米/秒的速度自A点出发沿AB方向运动至B点停止，动点Q以2厘米/秒的速度自B点出发沿折线BCD

运动至 D 点停止．若点 P、Q 同时出发运动了 t 秒，记 $\triangle BPQ$ 的面积为 S 厘米²，下面图象中能表示 S 与 t 之间的函数关系的是（ ）



【分析】应根据 $0 \leq t < 2$ 和 $2 \leq t < 4$ 两种情况进行讨论．把 t 当作已知数值，就可以求出 S ，从而得到函数的解析式，进一步即可求解．

【解答】解：当 $0 \leq t < 2$ 时， $S = 2t \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times (4 - t) = -\sqrt{3}t^2 + 4\sqrt{3}t$ ；

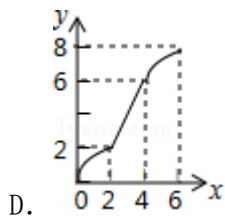
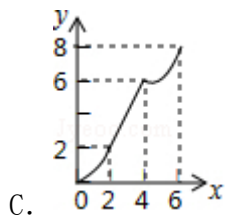
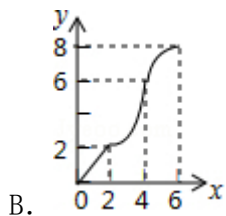
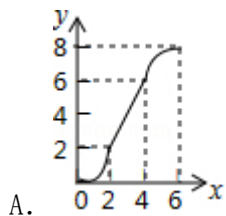
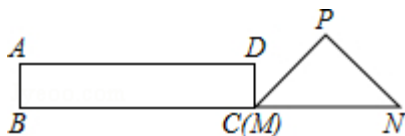
当 $2 \leq t < 4$ 时， $S = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times (4 - t) = -2\sqrt{3}t + 8\sqrt{3}$ ；

只有选项 D 的图形符合．

故选：D．

【点评】本题主要考查了动点问题的函数图象，利用图形的关系求函数的解析式，注意数形结合是解决本题的关键．

3. （2018•湖北黄石•3分）如图，在 $Rt\triangle PMN$ 中， $\angle P = 90^\circ$ ， $PM = PN$ ， $MN = 6\text{cm}$ ，矩形 ABCD 中 $AB = 2\text{cm}$ ， $BC = 10\text{cm}$ ，点 C 和点 M 重合，点 B、C（M）、N 在同一直线上，令 $Rt\triangle PMN$ 不动，矩形 ABCD 沿 MN 所在直线以每秒 1cm 的速度向右移动，至点 C 与点 N 重合为止，设移动 x 秒后，矩形 ABCD 与 $\triangle PMN$ 重叠部分的面积为 y ，则 y 与 x 的大致图象是（ ）



【分析】在 $\text{Rt}\triangle PMN$ 中解题，要充分运用好垂直关系和 45° 度角，因为此题也是点的移动问题，可知矩形 $ABCD$ 以每秒 1cm 的速度由开始向右移动到停止，和 $\text{Rt}\triangle PMN$ 重叠部分的形状可分为下列三种情况，（1） $0 \leq x \leq 2$ ；（2） $2 < x \leq 4$ ；（3） $4 < x \leq 6$ ；根据重叠图形确定面积的求法，作出判断即可。

【解答】解： $\because \angle P = 90^\circ$ ， $PM = PN$ ，

$\therefore \angle PMN = \angle PNM = 45^\circ$ ，

由题意得： $CM = x$ ，

分三种情况：

①当 $0 \leq x \leq 2$ 时，如图 1，边 CD 与 PM 交于点 E ，

$\because \angle PMN = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle MEC$ 是等腰直角三角形，

此时矩形 $ABCD$ 与 $\triangle PMN$ 重叠部分是 $\triangle EMC$ ，

$$\therefore y = S_{\triangle EMC} = \frac{1}{2} CM \cdot CE = \frac{1}{2} x^2;$$

故选项 B 和 D 不正确；

②如图 2，当 D 在边 PN 上时，过 P 作 $PF \perp MN$ 于 F ，交 AD 于 G ，

$\because \angle N = 45^\circ$ ， $CD = 2$ ，

$$\therefore CN=CD=2,$$

$$\therefore CM=6-2=4,$$

即此时 $x=4$,

当 $2 < x \leq 4$ 时, 如图 3, 矩形 ABCD 与 $\triangle PMN$ 重叠部分是四边形 EMCD,

过 E 作 $EF \perp MN$ 于 F,

$$\therefore EF=MF=2,$$

$$\therefore ED=CF=x-2,$$

$$\therefore y=S_{\text{梯形 EMCD}}=\frac{1}{2}CD \cdot (DE+CM)=\frac{1}{2} \times 2 \times (x-2+x)=2x-2;$$

③当 $4 < x \leq 6$ 时, 如图 4, 矩形 ABCD 与 $\triangle PMN$ 重叠部分是五边形 EMCGF, 过 E 作 $EH \perp MN$ 于 H,

$$\therefore EH=MH=2, DE=CH=x-2,$$

$$\therefore MN=6, CM=x,$$

$$\therefore CG=CN=6-x,$$

$$\therefore DF=DG=2-(6-x)=x-4,$$

$$\therefore y=S_{\text{梯形 EMCD}}-S_{\triangle FDG}=\frac{1}{2}CD(DE+CM)-\frac{1}{2}DG^2=\frac{1}{2} \times 2 \times (x-2+x)-\frac{1}{2}(x-4)^2=-\frac{1}{2}x^2+10x-18,$$

故选项 A 正确;

故选: A.

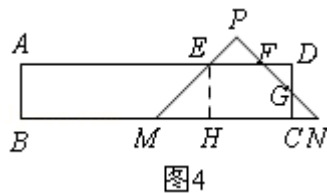


图4

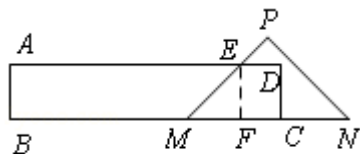


图3

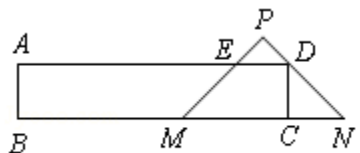


图2

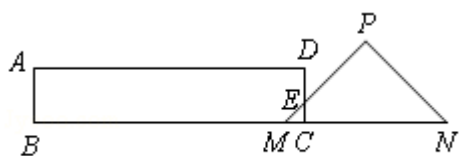
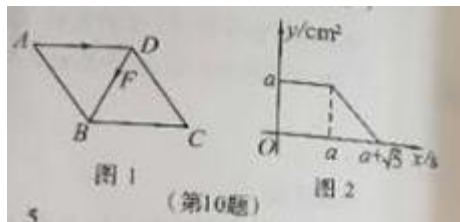


图1

【点评】此题是动点问题的函数图象，有难度，主要考查等腰直角三角形的性质和矩形的性质的应用、动点运动问题的路程表示，注意运用数形结合和分类讨论思想的应用.

4. (2018•河南•3分) 如图1，点 F 从菱形 $ABCD$ 的顶点 A 出发，沿 $A \rightarrow D \rightarrow B$ 以 1cm/s 的速度匀速运到点 B . 图2是点 F 运动时， $\triangle FBC$ 的面积 $y(\text{cm}^2)$ 随时间 $x(\text{s})$ 变化的关系图象，则 a 的值为

()



A. $\sqrt{5}$

B. 2

C. $\frac{5}{2}$

D. $2\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】动点问题的函数图象.

由函数图象横坐标可知, $AD=a$, $BD=a+\sqrt{5}-a=\sqrt{5}$

过点 B 作 $BE \perp AD$, 由图象, 当点 F 运动到点 D 时, $\triangle ABD$ 的面积是 a . 即: $\frac{1}{2} \times AD \times BE = a$, 且 $AD=a$

$\therefore BE=2$

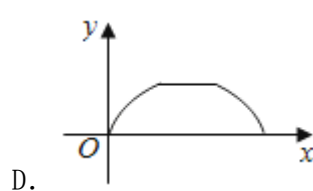
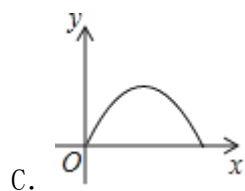
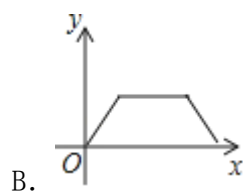
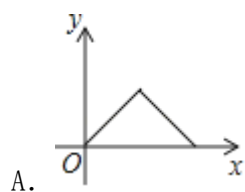
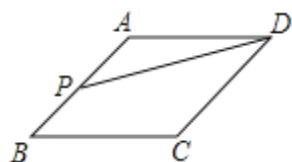
$\because$ 勾股定理, $DE = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1$

$\therefore AE=a-1$, 且由菱形性质可知, $AB=a$

$\because$ 在 $\triangle ABE$ 中, $AE^2 + BE^2 = AB^2$

$\therefore$ 即 $(a-1)^2 + 2^2 = a^2$, 解得 $a = \frac{5}{2}$

5. (2018 • 广东 • 3 分) 如图, 点 P 是菱形 ABCD 边上的一动点, 它从点 A 出发沿在 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 路径匀速运动到点 D, 设 $\triangle PAD$ 的面积为 y, P 点的运动时间为 x, 则 y 关于 x 的函数图象大致为 ()



【分析】设菱形的高为 h, 即是一个定值, 再分点 P 在 AB 上, 在 BC 上和在 CD 上三种情况, 利用三角形的面积公式列式求出相应的函数关系式, 然后选择答案即可.

【解答】解: 分三种情况:

①当 P 在 AB 边上时，如图 1，

设菱形的高为 h，

$$y = \frac{1}{2}AP \cdot h,$$

∵ AP 随 x 的增大而增大，h 不变，

∴ y 随 x 的增大而增大，

故选项 C 不正确；

②当 P 在边 BC 上时，如图 2，

$$y = \frac{1}{2}AD \cdot h,$$

AD 和 h 都不变，

∴ 在这个过程中，y 不变，

故选项 A 不正确；

③当 P 在边 CD 上时，如图 3，

$$y = \frac{1}{2}PD \cdot h,$$

∵ PD 随 x 的增大而减小，h 不变，

∴ y 随 x 的增大而减小，

∵ P 点从点 A 出发沿在 A→B→C→D 路径匀速运动到点 D，

∴ P 在三条线段上运动的时间相同，

故选项 D 不正确；

故选：B.

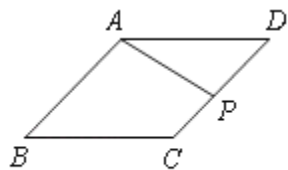


图3

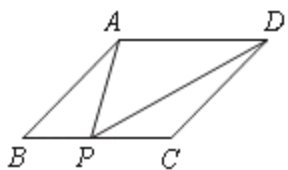


图2

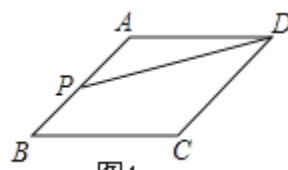
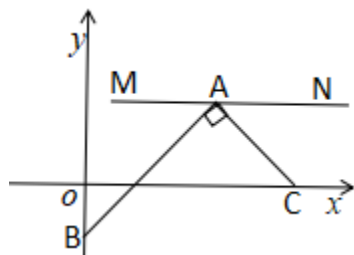


图1

【点评】本题考查了动点问题的函数图象，菱形的性质，根据点 P 的位置的不同，分三段求出 $\triangle PAD$ 的面积表达式是解题的关键。

6. (2018•广西桂林•3 分) 如图，在平面直角坐标系中，M、N、C 三点的坐标分别为 $(-1, 1)$ ， $(3, 1)$ ， $(3, 0)$ ，点 A 为线段 MN 上的一个动点，连接 AC，过点 A 作 $AB \perp AC$ 交 y 轴于点 B，当点 A 从 M 运动到 N 时，点 B 随之运动，设点 B 的坐标为 $(0, b)$ ，则 b 的取值范围是 ()



- A. $-\frac{1}{4} \leq b \leq 1$ B. $-\frac{5}{4} \leq b \leq 1$ C. $-\frac{9}{4} \leq b \leq \frac{1}{2}$ D. $-\frac{9}{4} \leq b \leq 1$

【答案】A

【解析】分析：分别求出当点 A 与点 M、N 重合时直线 AC 的解析式，由 $AB \perp AC$ 可得直线 AB 的解析式，从而求出 b 的值，最终可确定 b 的取值范围。

详解：当点 A 与点 N 重合时， $MN \perp AB$ ，

$\therefore MN$ 是直线 AB 的一部分，

$\therefore N(3, 1)$

$\therefore$ 此时 $b=1$ ；

当点 A 与点 M 重合时，设直线 AC 的解析式为 $y=k_1x+m$ ，

由于 AC 经过点 A、C 两点，故可得
$$\begin{cases} \frac{1}{2}k_1 + m = 1 \\ 3k_1 + m = 0 \end{cases}$$
，解得： $k_1 = -\frac{2}{5}$ ，

设直线 AB 的解析式为 $y=k_2x+b$ ，

$\therefore AB \perp AC$ ，

$\therefore k_1 \cdot k_2 = -1$ ，

$\therefore k_2 =$

故直线 AB 的解析式为 $y=x+b$ ，

把 $(, 1)$ 代入 $y=x+b$ 得， $b=-$ 。

$\therefore b$ 的取值范围是 $-\frac{1}{4} \leq b \leq 1$ 。

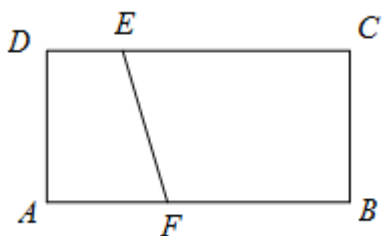
故选 A。

点睛：此题考查一次函数基本性质，待定系数求解析式，简单的几何关系。

二. 填空题

1. (2018·浙江舟山·4分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $AD=2$, 点 E 在 CD 上, $DE=1$, 点 F 是边 AB 上一动点, 以 EF 为斜边作 $Rt\triangle EFP$. 若点 P 在矩形 $ABCD$ 的边上, 且这样的直角三角形恰好

有两个, 则 AF 的值是_____。



【考点】矩形的性质, 圆周角定理, 切线的性质, 直角三角形的性质

【分析】学习了圆周角的推论: 直径所对的圆周角是直角, 可提供解题思路, 不妨以 EF 为直径作圆, 以边界值去讨论该圆与矩形 $ABCD$ 交点的个数

【解答】解: 以 EF 为斜边的直角三角形的直角顶点 P 是以 EF 为直径的圆与矩形边的交点, 取 EF 的中点 O ,

(1) 如图 1, 当圆 O 与 AD 相切于点 G 时, 连结 OG , 此时点 G 与点 P 重合, 只有一个点, 此时 $AF=OG=DE=1$;

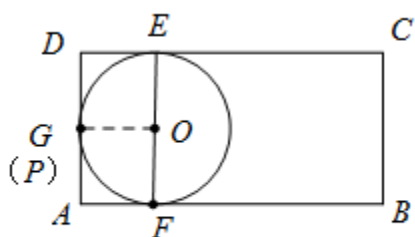


图1

(2) 如图 2, 当圆 O 与 BC 相切于点 G , 连结 OG , EG , FG , 此时有三个点 P 可以构成 $Rt\triangle EFP$,

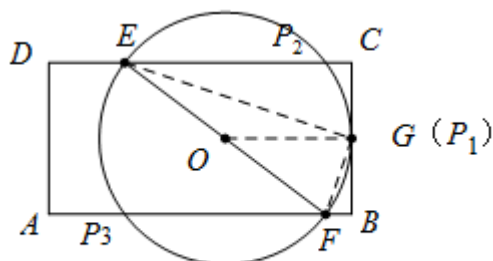


图2

∵OG 是圆 O 的切线,

∴OG ⊥ BC

∴OG // AB // CD

∴OE=OF,

∴BG=CG,

∴OG = $\frac{1}{2}$ (BF+CE) ,

设 AF=x, 则 BF=4-x, OG = $\frac{1}{2}$ (4-x+4-1) = $\frac{1}{2}$ (7-x) ,

则 EF=2OG=7-x, EG²=EC²+CG²=9+1=10, FG²=BG²+BF²=1+(4-x)²

在 Rt△EFG 中, 由勾股定理得 EF²=EG²+FG² , 得 (7-x)²=10+1+(4-x)², 解得 x= $\frac{11}{3}$

所以当 1 < AF < $\frac{11}{3}$ 时, 以 EF 为直径的圆与矩形 ABCD 的交点 (除了点 E 和 F) 只有两个;

(3) 因为点 F 是边 AB 上一动点:

当点 F 与 A 点重合时, AF=0, 此时 Rt△EFP 正好有两个符合题意;

当点 F 与 B 点重合时, AF=4, 此时 Rt△EFP 正好有两个符合题意;

故答案为 0 或 1 < AF < $\frac{11}{3}$ 或 4

【点评】正确添加辅助线是解决本题分关键.

三 解答题

1. (2018•山西•13 分) 综合与探究

如图, 抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 连接

AC, BC . 点 P 是第四象限内抛物线上的一个动点, 点 P 的横坐标为 m , 过点 P 作 $PM \perp x$ 轴, 垂足为点 M , PM 交 BC 于点 Q , 过点 P 作 $PE \parallel AC$ 交 x 轴于点 E , 交 BC 于点 F .

(1) 求 A, B, C 三点的坐标;

(2) 试探究在点 P 的运动的过程中, 是否存在这样的点 Q , 使得以 A, C, Q 为顶点的三角形是

等腰三角形. 若存在, 请直接写出此时点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 请用含 m 的代数式表示线段 QF 的长, 并求出 m 为何值时 QF 有最大值.

【考点】几何与二次函数综合

【解析】

(1) 解: 由 $y = 0$, 得 $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4 = 0$

解得 $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.

$\therefore$ 点 A, B 的坐标分别为 $A(-3, 0)$, $B(4, 0)$

由 $x = 0$, 得 $y = -4$. $\therefore$ 点 C 的坐标为 $C(0, -4)$.

↑
↑
↑

(2) 答: $Q\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2} - 4\right)$, $O_2(1, -3)$.

(3) 过点 F 作 $FG \perp PQ$ 于点 G .

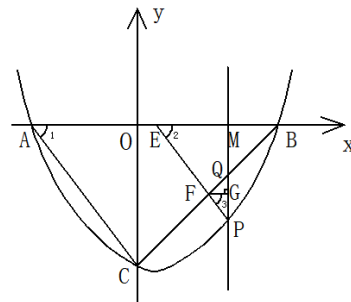
则 $FG \parallel x$ 轴. 由 $B(4, 0)$, $C(0, -4)$, 得 $\triangle OBC$ 为等腰直角三角形.

$$\therefore \angle OBC = \angle QFG = 45^\circ. \therefore GQ = FG = \frac{\sqrt{2}}{2} FQ.$$

$$PE \parallel AC, \therefore \angle 1 = \angle 2.$$

$$FG \parallel x \text{ 轴}, \therefore \angle 2 = \angle 3. \therefore \angle 1 = \angle 3.$$

$$\angle FGP = \angle AOC = 90^\circ, \therefore \triangle FGP \sim \triangle AOC.$$



(第23题图)

$$\therefore \frac{FG}{AO} = \frac{GP}{OC}, \text{ 即 } \frac{FG}{3} = \frac{GP}{4}.$$

$$\therefore GP = \frac{4}{3} FG = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} FQ = \frac{2\sqrt{2}}{3} FQ.$$

$$\therefore QP = GQ + GP = \frac{\sqrt{2}}{2} FQ + \frac{2\sqrt{2}}{3} FQ = \frac{7\sqrt{2}}{6} FQ.$$

$$\therefore FQ = \frac{3\sqrt{2}}{7} QP.$$

$$\because PM \perp x \text{ 轴}, \text{ 点 } P \text{ 的横坐标为 } m, \angle MBQ = 45^\circ,$$

$$\therefore QM = MB = 4 - m, \quad PM = -\frac{1}{3}m^2 + \frac{1}{3}m + 4.$$

$$\therefore QP = PM - QM = -\frac{1}{3}m^2 + \frac{1}{3}m + 4 - (4 - m) = -\frac{1}{3}m^2 + \frac{4}{3}m.$$

$$\therefore QF = \frac{3\sqrt{2}}{7} QP = \frac{3\sqrt{2}}{7} \left(-\frac{1}{3}m^2 + \frac{4}{3}m\right) = -\frac{\sqrt{2}}{7}m^2 + \frac{4\sqrt{2}}{7}m.$$

$$\because -\frac{\sqrt{2}}{7} < 0,$$

$$\therefore QF \text{ 有最大值.}$$

$$\therefore \text{ 当 } m = -\frac{\frac{4\sqrt{2}}{7}}{2\left(-\frac{\sqrt{2}}{7}\right)} = 2 \text{ 时, } QF \text{ 有最大值.}$$

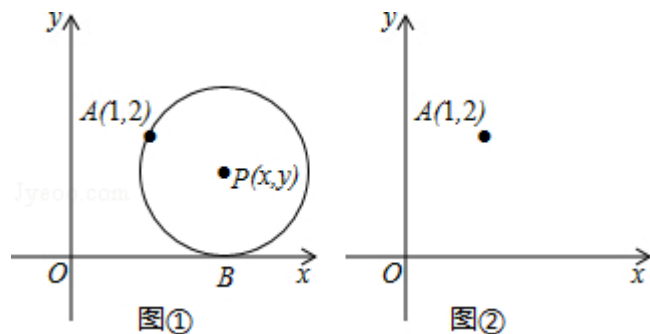
2（2018•山东滨州•14分）如图①，在平面直角坐标系中，圆心为 $P(x, y)$ 的动圆经过点 $A(1, 2)$ 且与 x 轴相切于点 B .

（1）当 $x=2$ 时，求 $\odot P$ 的半径；

（2）求 y 关于 x 的函数解析式，请判断此函数图象的形状，并在图②中画出此函数的图象；

（3）请类比圆的定义（图可以看成是到定点的距离等于定长的所有点的集合），给（2）中所得函数图象进行定义：此函数图象可以看成是到点 A 的距离等于到 x 轴 的距离的所有点的集合.

（4）当 $\odot P$ 的半径为 1 时，若 $\odot P$ 与以上（2）中所得函数图象相交于点 C 、 D ，其中交点 $D(m, n)$ 在点 C 的右侧，请利用图②，求 $\cos \angle APD$ 的大小.



【分析】（1）由题意得到 $AP=PB$ ，求出 y 的值，即为圆 P 的半径；

（2）利用两点间的距离公式，根据 $AP=PB$ ，确定出 y 关于 x 的函数解析式，画出函数图象即可；

（3）类比圆的定义描述此函数定义即可；

（4）画出相应图形，求出 m 的值，进而确定出所求角的余弦值即可.

【解答】解：（1）由 $x=2$ ，得到 $P(2, y)$ ，

连接 AP ， PB ，

$\because$ 圆 P 与 x 轴相切，

$\therefore PB \perp x$ 轴，即 $PB=y$ ，

由 $AP=PB$ ，得到 $\sqrt{(1-2)^2 + (2-y)^2} = y$ ，

解得： $y = \frac{5}{4}$ ，

则圆 P 的半径为 $\frac{5}{4}$ ；

（2）同（1），由 $AP=PB$ ，得到 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = y^2$ ，

整理得： $y = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 1$ ，即图象为开口向上的抛物线，

画出函数图象，如图②所示；

（3）给（2）中所得函数图象进行定义：此函数图象可以看成是到点 A 的距离等于到 x 轴的距离的所有点的集合；

故答案为：点 A ； x 轴；

（4）连接 CD ，连接 AP 并延长，交 x 轴于点 F ，

设 $PE=a$ ，则有 $EF=a+1$ ， $ED = \sqrt{1-a^2}$ ，

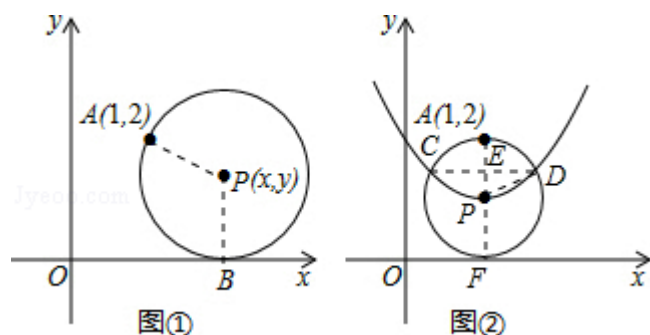
$\therefore D$ 坐标为 $(1 + \sqrt{1-a^2}, a+1)$ ，

代入抛物线解析式得： $a+1 = \frac{1}{4}(1-a^2) + 1$ ，

解得： $a = -2 + \sqrt{5}$ 或 $a = -2 - \sqrt{5}$ （舍去），即 $PE = -2 + \sqrt{5}$ ，

在 $Rt\triangle PED$ 中， $PE = \sqrt{5} - 2$ ， $PD=1$ ，

则 $\cos \angle APD = \frac{PE}{PD} = \sqrt{5} - 2$.



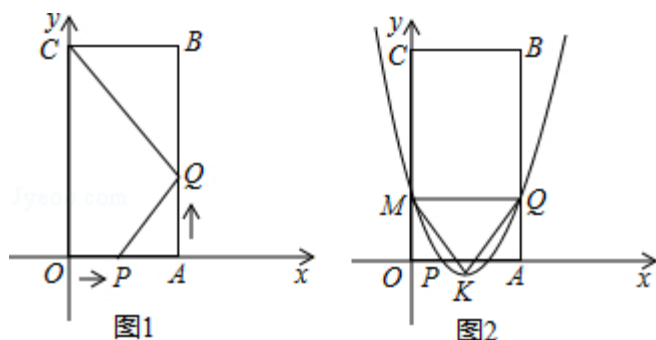
【点评】此题属于圆的综合题，涉及的知识有：两点间的距离公式，二次函数的图象与性质，圆的性质，勾股定理，弄清题意是解本题的关键．

3（2018•江苏扬州•12分）如图1，四边形OABC是矩形，点A的坐标为（3，0），点C的坐标为（0，6），点P从点O出发，沿OA以每秒1个单位长度的速度向点A出发，同时点Q从点A出发，沿AB以每秒2个单位长度的速度向点B运动，当点P与点A重合时运动停止．设运动时间为t秒．

（1）当t=2时，线段PQ的中点坐标为 $(\frac{5}{2}, 2)$ ；

（2）当 $\triangle CBQ$ 与 $\triangle PAQ$ 相似时，求t的值；

（3）当t=1时，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过P，Q两点，与y轴交于点M，抛物线的顶点为K，如图2所示，问该抛物线上是否存在点D，使 $\angle MQD = \frac{1}{2} \angle MKQ$ ？若存在，求出所有满足条件的D的坐标；若不存在，说明理由．



【分析】（1）先根据时间 $t=2$ ，和速度可得动点 P 和 Q 的路程 OP 和 AQ 的长，再根据中点坐标公式可得结论；

（2）根据矩形的性质得： $\angle B = \angle PAQ = 90^\circ$ ，所以当 $\triangle CBQ$ 与 $\triangle PAQ$ 相似时，存在两种情况：

①当 $\triangle PAQ \sim \triangle QBC$ 时， $\frac{PA}{AQ} = \frac{QB}{BC}$ ，②当 $\triangle PAQ \sim \triangle CBQ$ 时， $\frac{PA}{AQ} = \frac{BC}{BQ}$ ，分别列方程可得 t 的值；

（3）根据 $t=1$ 求抛物线的解析式，根据 $Q(3, 2)$ ， $M(0, 2)$ ，可得 $MQ \parallel x$ 轴， $\therefore KM = KQ$ ， $KE \perp MQ$ ，画出符合条件的点 D ，证明 $\triangle KEQ \sim \triangle QMH$ ，列比例式可得点 D 的坐标，同理根据对称可得另一个点 D 。

【解答】解：（1）如图 1， $\because$ 点 A 的坐标为 $(3, 0)$ ，

$\therefore OA = 3$ ，

当 $t=2$ 时， $OP = t = 2$ ， $AQ = 2t = 4$ ，

$\therefore P(2, 0)$ ， $Q(3, 4)$ ，

$\therefore$ 线段 PQ 的中点坐标为： $(\frac{2+3}{2}, \frac{0+4}{2})$ ，即 $(\frac{5}{2}, 2)$ ；

故答案为： $(\frac{5}{2}, 2)$ ；

（2）如图 1， $\because$ 当点 P 与点 A 重合时运动停止，且 $\triangle PAQ$ 可以构成三角形，

$\therefore 0 < t < 3$ ，

$\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形，

$$\therefore \angle B = \angle PAQ = 90^\circ$$

$\therefore$ 当 $\triangle CBQ$ 与 $\triangle PAQ$ 相似时，存在两种情况：

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \triangle PAQ \sim \triangle QBC \text{ 时, } \frac{PA}{AQ} = \frac{QB}{BC},$$

$$\therefore \frac{3-t}{2t} = \frac{6-2t}{3},$$

$$4t^2 - 15t + 9 = 0,$$

$$(t-3) \left(t - \frac{3}{4}\right) = 0,$$

$$t_1 = 3 \text{ (舍)}, \quad t_2 = \frac{3}{4},$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \triangle PAQ \sim \triangle CBQ \text{ 时, } \frac{PA}{AQ} = \frac{BC}{BQ},$$

$$\therefore \frac{3-t}{2t} = \frac{3}{6-2t},$$

$$t^2 - 9t + 9 = 0,$$

$$t = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \frac{9+3\sqrt{5}}{2} > 7,$$

$$\therefore x = \frac{9+3\sqrt{5}}{2} \text{ 不符合题意, 舍去,}$$

综上所述，当 $\triangle CBQ$ 与 $\triangle PAQ$ 相似时， t 的值是 $\frac{3}{4}$ 或 $\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$ ；

(3) 当 $t=1$ 时， $P(1, 0)$ ， $Q(3, 2)$ ，

把 $P(1, 0)$ ， $Q(3, 2)$ 代入抛物线 $y=x^2+bx+c$ 中得：

$$\begin{cases} 1+b+c=0 \\ 9+3b+c=2 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b=-3 \\ c=2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线: } y=x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{顶点 k } \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right),$$

$$\because Q(3, 2), M(0, 2),$$

$$\therefore MQ \parallel x \text{ 轴},$$

作抛物线对称轴, 交 MQ 于 E,

$$\therefore KM=KQ, KE \perp MQ,$$

$$\therefore \angle MKE = \angle QKE = \frac{1}{2} \angle MKQ,$$

$$\text{如图 2, } \angle MQD = \frac{1}{2} \angle MKQ = \angle QKE,$$

设 DQ 交 y 轴于 H,

$$\because \angle HMQ = \angle QEK = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle KEQ \sim \triangle QMH,$$

$$\therefore \frac{KE}{EQ} = \frac{MQ}{MH},$$

$$\therefore \frac{2+\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{MH},$$

$$\therefore MH=2,$$

$$\therefore H(0, 4),$$

$$\text{易得 HQ 的解析式为: } y = -\frac{2}{3}x+4,$$

$$\text{则} \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 4 \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases},$$

$$x^2 - 3x + 2 = -\frac{2}{3}x + 4,$$

$$\text{解得: } x_1 = 3 \text{ (舍)}, \quad x_2 = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore D \left(-\frac{2}{3}, \frac{40}{9} \right);$$

同理，在 M 的下方，y 轴上存在点 H，如图 3，使 $\angle HQM = \frac{1}{2} \angle MKQ = \angle QKE$ ，

由对称性得：H (0, 0)，

易得 OQ 的解析式： $y = \frac{2}{3}x$ ，

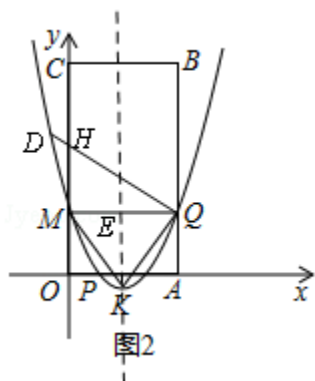
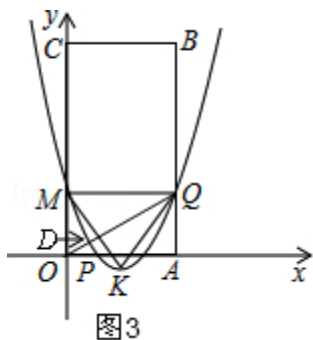
$$\text{则} \begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases},$$

$$x^2 - 3x + 2 = \frac{2}{3}x,$$

$$\text{解得: } x_1 = 3 \text{ (舍)}, \quad x_2 = \frac{2}{3},$$

$$\therefore D \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9} \right);$$

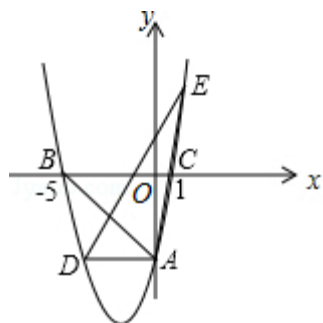
综上所述，点 D 的坐标为： $D \left(-\frac{2}{3}, \frac{40}{9} \right)$ 或 $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9} \right)$.



【点评】本题是二次函数与三角形相似的综合问题，主要考查相似三角形的判定和性质的综合应用，三角形和四边形的面积，二次函数的最值问题的应用，函数的交点等知识，本题比较复杂，注意用 t 表示出线段长度，再利用相似即可找到线段之间的关系，代入可解决问题。

4 (2018•山东菏泽•10 分) 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx-5$ 交 y 轴于点 A，交 x 轴于点 B (-5, 0) 和点 C (1, 0)，过点 A 作 $AD \parallel x$ 轴交抛物线于点 D。

- (1) 求此抛物线的表达式；
- (2) 点 E 是抛物线上一点，且点 E 关于 x 轴的对称点在直线 AD 上，求 $\triangle EAD$ 的面积；
- (3) 若点 P 是直线 AB 下方的抛物线上一动点，当点 P 运动到某一位置时， $\triangle ABP$ 的面积最大，求出此时点 P 的坐标和 $\triangle ABP$ 的最大面积。



【考点】HF：二次函数综合题．菁优网

【分析】（1）根据题意可以求得 a 、 b 的值，从而可以求得抛物线的表达式；

（2）根据题意可以求得 AD 的长和点 E 到 AD 的距离，从而可以求得 $\triangle EAD$ 的面积；

（3）根据题意可以求得直线 AB 的函数解析式，再根据题意可以求得 $\triangle ABP$ 的面积，然后根据二次函数的性质即可解答本题．

【解答】解：（1） $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx-5$ 交 y 轴于点 A ，交 x 轴于点 $B(-5, 0)$ 和点 $C(1, 0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 25a-5b-5=0 \\ a+b-5=0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases},$$

$\therefore$ 此抛物线的表达式是 $y=x^2+4x-5$ ；

（2） $\because$ 抛物线 $y=x^2+4x-5$ 交 y 轴于点 A ，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(0, -5)$ ，

$\because AD \parallel x$ 轴，点 E 是抛物线上一点，且点 E 关于 x 轴的对称点在直线 AD 上，

$\therefore$ 点 E 的纵坐标是 5 ，点 E 到 AD 的距离是 10 ，

当 $y=-5$ 时， $-5=x^2+4x-5$ ，得 $x=0$ 或 $x=-4$ ，

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-4, -5)$ ，

$\therefore AD=4$ ，

$$\therefore \triangle EAD \text{ 的面积是: } \frac{4 \times 10}{2} = 20;$$

(3) 设点 P 的坐标为 $(p, p^2 + 4p - 5)$ ，如右图所示，

设过点 A $(0, -5)$ ，点 B $(-5, 0)$ 的直线 AB 的函数解析式为 $y = mx + n$ ，

$$\begin{cases} n = -5 \\ -5m + n = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} m = -1 \\ n = -5 \end{cases},$$

即直线 AB 的函数解析式为 $y = -x - 5$ ，

当 $x = p$ 时， $y = -p - 5$ ，

$$\because OB = 5,$$

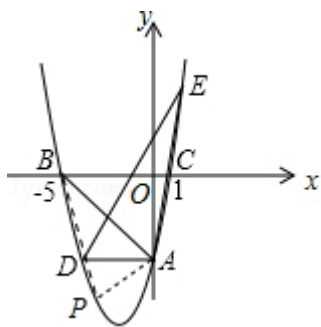
$$\therefore \triangle ABP \text{ 的面积是: } S = \frac{(-p-5) - (p^2 + 4p - 5)}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2} \left[-\left(p + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \right],$$

$\because$ 点 P 是直线 AB 下方的抛物线上一动点，

$$\therefore -5 < p < 0,$$

$$\therefore \text{当 } p = -\frac{5}{2} \text{ 时, } S \text{ 取得最大值, 此时 } S = \frac{125}{8}, \text{ 点 } p \text{ 的坐标是 } \left(-\frac{5}{2}, -\frac{35}{4}\right),$$

$$\text{即点 } p \text{ 的坐标是 } \left(-\frac{5}{2}, -\frac{35}{4}\right) \text{ 时, } \triangle ABP \text{ 的面积最大, 此时 } \triangle ABP \text{ 的面积是 } \frac{125}{8}.$$



【点评】本题考查二次函数综合题，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用数形结合思想和二次函数的性质解答。

5 (2018•江西•9分) 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, 点是射线 BD 上一动点, 以 AP 为边向右侧作等边 $\triangle APE$, 点的位置随点的位置变化而变化.

(1) 如图 1, 当点在菱形 $ABCD$ 内部或边上时, 连接 CE , BP 与 CE 的数量关系是_____ ,

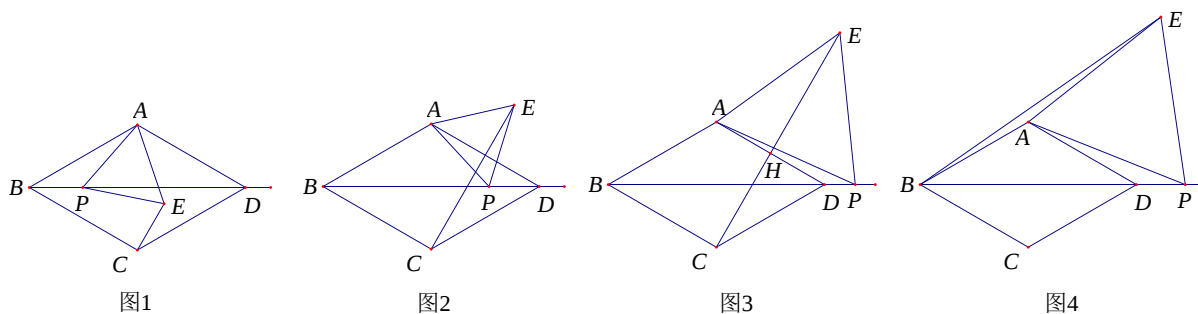
CE 与 AD 的位置关系是_____ ;

(2) 当点在菱形 $ABCD$ 外部时, (1)中的结论是否还成立? 若成立, 请予以证明; 若不成立,

请说明理由(选择图 2, 图 3 中的一种情况予以证明或说理).

(3) 如图 4, 当点在线段 BD 的延长线上时, 连接 BE , 若 $AB = 2\sqrt{3}$, $BE = 2\sqrt{19}$, 求四边形

$ADPE$ 的面积.



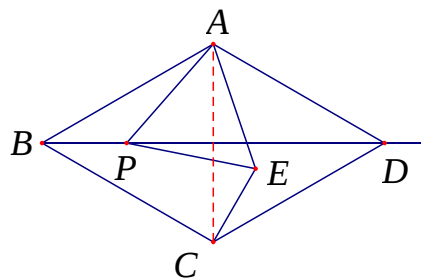
【解析】 (1) ① $BP=CE$ 理由如下:

连接 AC

$\because$ 菱形 $ABCD$, $\angle ABC=60^\circ$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形

$\therefore AB=AC$ $\angle BAC=60^\circ$



$\because \triangle APE$ 是等边三角形

$\therefore AP=AE \quad \angle PAE=60^\circ$

$\therefore \angle BAP=\angle CAE$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ACE \quad \therefore BP=CE$

★★

② $CE \perp AD$

$\because$ 菱形对角线平分对角

$\therefore \angle ABD = 30^\circ$

$\because \triangle ABP \cong \triangle ACE$

$\therefore \angle ACF = \angle ABD = 30^\circ$

$\because$

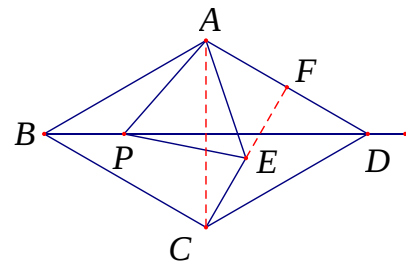
$\therefore \angle DCF = 30^\circ$

$\therefore \angle DCF + \angle ADC = 90^\circ$

$\therefore \angle CFD = 90^\circ$

$\therefore CF \perp AD$ 即 $CE \perp AD$

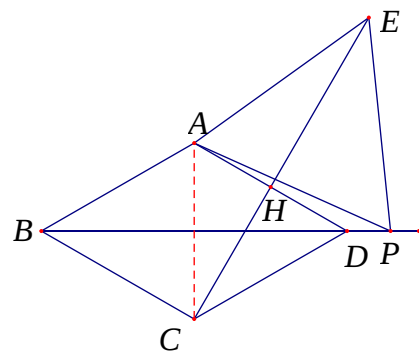
★★



(2) (1) 中的结论: $BP=CE$, $CE \perp AD$ 仍然成立, 理由如下:

连接 AC

$\because$ 菱形 ABCD, $\angle ABC=60^\circ$



∴△ABC 和△ACD 都是等边三角形

∴AB=AC ∠BAD=120°

∠BAP=120° + ∠DAP

∵△APE 是等边三角形

∴AP=AE ∠PAE=60°

∴∠CAE=60° + 60° + ∠DAP=120° + ∠DAP

∴∠BAP=∠CAE

∴△ABP≌△ACE ∴BP=CE $\angle ACE = \angle ABD = 30^\circ$

∴∠DCE=30° ∵∠ADC=60°

∴∠DCE+∠ADC=90° ∴∠CHD=90° ∴CE⊥AD

∴(1)中的结论: BP=CE , CE⊥AD 仍然成立.

★★★

(3) 连接 AC 交 BD 于点 O , CE, 作 EH⊥AP 于

H

∵四边形 ABCD 是菱形

∴AC⊥BD BD 平分∠ABC

∵∠ABC=60° , $AB = 2\sqrt{3}$

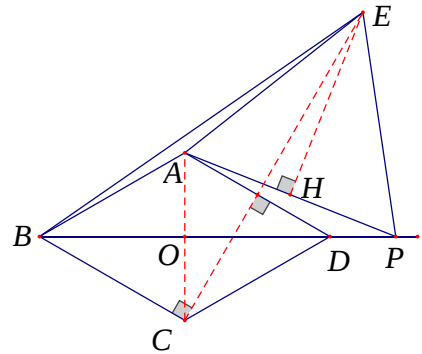
∴∠ABO=30° ∴ $AO = \sqrt{3}$ BO=DO=3

∴BD=6

由(2)知 CE⊥AD

∵AD//BC ∴CE⊥BC

∴ $BE = 2\sqrt{19}$ $BC = AB = 2\sqrt{3}$



$$\therefore CE = \sqrt{(2\sqrt{19})^2 - (2\sqrt{3})^2} = 8$$

由 (2) 知 $BP=CE=8$ $\therefore DP=2$ $\therefore OP=5$

$$\therefore AP = \sqrt{5^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}$$

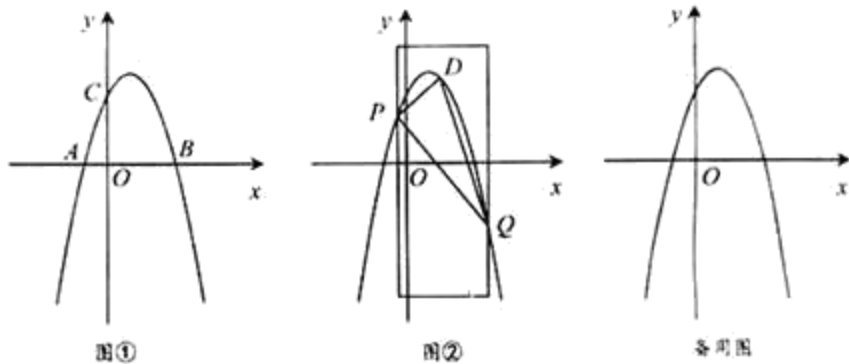
$\because \triangle APE$ 是等边三角形, $\therefore PH = \sqrt{7}$ $EH = \sqrt{21}$

$$\therefore S_{\text{四}ADPE} = S_{\triangle ADP} + S_{\triangle APE}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\text{四}ADPE} &= \frac{1}{2}DP \cdot AO + \frac{1}{2}AP \cdot EH = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times \sqrt{21} \\ &= \sqrt{3} + 7\sqrt{3} \\ &= 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\therefore$ 四边形 ADPE 的面积是 $8\sqrt{3}$.

6 (2018•江苏盐城•10 分) 如图①, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 两点, 且与轴交于点 C .



(1) 求抛物线的表达式；

(2) 如图②，用宽为 4 个单位长度的直尺垂直于轴，并沿轴左右平移，直尺的左右两边所在的直线与抛物线相交于 P 、 Q 两点（点 P 在点 Q 的左侧），连接 PQ ，在线段 PQ 上方抛物线上有一动点 D ，连接 DP 、 DQ 。（I）若点 P 的横坐标为 $-\frac{1}{2}$ ，求 $\triangle DPQ$ 面积的最大值，并求此时点 D 的坐标；

（II）直尺在平移过程中， $\triangle DPQ$ 面积是否有最大值？若有，求出面积的最大值；若没有，请说明理由。

【答案】(1) 解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 两点, $\therefore$

$$\begin{cases} a - b + 3 = 0 \\ 9a + 3b + 3 = 0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$

(2) 解: (I) $\because$ 点 P 的横坐标是 $-\frac{1}{2}$, 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $y = -\frac{1}{4} - 1 + 3 = \frac{7}{4}$, 则点 P $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$,

$\because$ 直尺的宽度为 4 个单位长度,

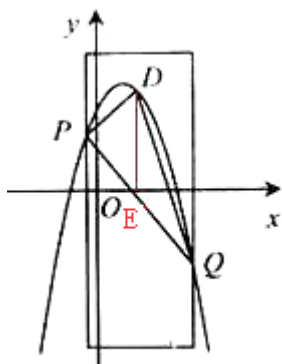
$\therefore$ 点 Q 的横坐标为 $-\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2}$, 则当 $x = \frac{7}{2}$ 时, $y = -\frac{49}{4} + 7 + 3 = -\frac{9}{4}$,

$\therefore$ 点 Q $(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4})$,

设直线 PQ 的表达式为: $y = kx + c$, 由 P $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$, Q $(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4})$, 可得

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}k + c = \frac{7}{4} \\ \frac{7}{2}k + c = -\frac{9}{4} \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = -1 \\ b = \frac{5}{4} \end{cases}, \text{ 则直线 PQ 的表达式为: } y = -x + \frac{5}{4},$$

如图②, 过点 D 作直线 DE 垂直于 x 轴, 交 PQ 于点 E, 设 D $(m, -m^2 + 2m + 3)$, 则 E $(m, -m + \frac{5}{4})$,



图②

$$\begin{aligned} \text{则 } S_{\triangle PQD} &= S_{\triangle PDE} + S_{\triangle QDE} = \frac{1}{2} \times |x_Q - x_P| \times DE = \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\right) \times \left[-m^2 + 2m + 3 - \left(-m + \frac{5}{4}\right)\right] \\ &= -2m^2 + 6m + \frac{7}{2} = -2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + 8, \end{aligned}$$

$\because -\frac{1}{2} < m < \frac{7}{2}$ 即当 $m = \frac{3}{2}$ 时, $S_{\triangle PQD} = 8$ 最大, 此时点 D $(\frac{3}{2}, \frac{15}{4})$ 。

(II) 设 P $(n, -n^2 + 2n + 3)$, 则 Q $(n+4, -(n+4)^2 + 2(n+4) + 3)$, 即 Q $(n+4, -n^2 - 6n - 5)$, 而直线 PQ 的表达式为: $y = (-2n - 2)x + n^2 + 4n + 3$,

设 $D(t, -t^2+2t+3)$ ，则 $E(t, n^2+4n+3-2nt-2t)$

$$\therefore S_{\triangle PQD} = \frac{1}{2} \times |x_Q - x_P| \times DE = 2(-t^2+2t+3-n^2-4n-3+2nt+2t)$$

$$= 2[-t^2+2(n+2)t-n^2-4n]$$

$$= -2(t-m-2)^2 + 8 \leq 8$$

当 $t=n+2$ 时， $S_{\triangle PQD}=8$.

$\therefore \triangle PQD$ 面积的最大值为 8

【考点】二次函数的最值，待定系数法求二次函数解析式，三角形的面积

【解析】【分析】（1）将两点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 坐标代入 $y = ax^2 + bx + 3$ ，可得方程组，解之即可；（2）（I）在遇到几何或代数求最大值，可联系到二次函数求最大值的应用，即将 $\triangle PQD$ 的面积用代数式的形式表示出来，因为它的面积随着点 D 的位置改变而改变，所以可设点 D 的坐标为 $(m, -m^2+2m+3)$ ，过点 D 作直线 DE 垂直于 x 轴，交 PQ 于点 E，则需要用 m 表示出点 E 的坐标，而点 E 在线段 PQ 上，求出 PQ 的坐标及直线 PQ 的表达式即可解答；

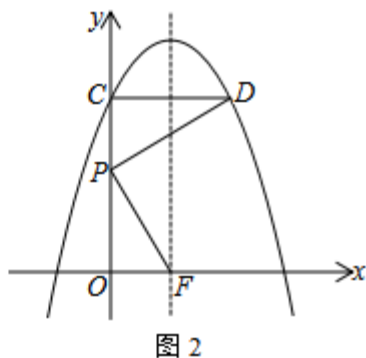
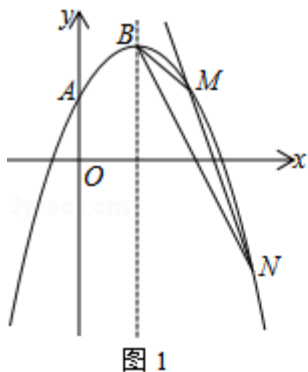
（II）可设 $P(n, -n^2+2n+3)$ ，则 $Q(n+4, -(n+4)^2+2(n+4)+3)$ ，作法与（I）一样，表示出 $\triangle PQD$ 的面积，运用二次函数求最值。

7. （2018·湖北省武汉·12分）抛物线 $L: y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $A(0, 1)$ ，与它的对称轴直线 $x=1$ 交于点 B.

（1）直接写出抛物线 L 的解析式；

（2）如图 1，过定点的直线 $y=kx - k+4$ ($k < 0$) 与抛物线 L 交于点 M、N. 若 $\triangle BMN$ 的面积等于 1，求 k 的值；

（3）如图 2，将抛物线 L 向上平移 m ($m > 0$) 个单位长度得到抛物线 L_1 ，抛物线 L_1 与 y 轴交于点 C，过点 C 作 y 轴的垂线交抛物线 L_1 于另一点 D. F 为抛物线 L_1 的对称轴与 x 轴的交点，P 为线段 OC 上一点. 若 $\triangle PCD$ 与 $\triangle POF$ 相似，并且符合条件的点 P 恰有 2 个，求 m 的值及相应点 P 的坐标.



【分析】（1）根据对称轴为直线 $x=1$ 且抛物线过点 $A(0, 1)$ 求解可得；

（2）根据直线 $y=kx - k + 4 = k(x - 1) + 4$ 知直线所过定点 G 坐标为 $(1, 4)$ ，从而得出 $BG=2$ ，由 $S_{\triangle BMN} = S_{\triangle BNG} - S_{\triangle BMG} = \frac{1}{2}BG \cdot x_N - \frac{1}{2}BG \cdot x_M = 1$ 得出 $x_N - x_M = 1$ ，联立直线和抛物线解析式求得 $x = \frac{2-k \pm \sqrt{k^2 - 8}}{2}$ ，根据 $x_N - x_M = 1$ 列出关于 k 的方程，解之可得；

（3）设抛物线 L_1 的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 1 + m$ ，知 $C(0, 1+m)$ 、 $D(2, 1+m)$ 、 $F(1, 0)$ ，再设 $P(0, t)$ ，分 $\triangle PCD \sim \triangle POF$ 和 $\triangle PCD \sim \triangle POF$ 两种情况，由对应边成比例得出关于 t 与 m 的方程，利用符合条件的点 P 恰有 2 个，结合方程的解的情况求解可得。

【解答】解：（1）由题意知 $\begin{cases} \frac{b}{2 \times (-1)} = 1, \\ c = 1 \end{cases}$

解得： $b=2$ 、 $c=1$ ，

$\therefore$ 抛物线 L 的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 1$ ；

（2）如图 1，

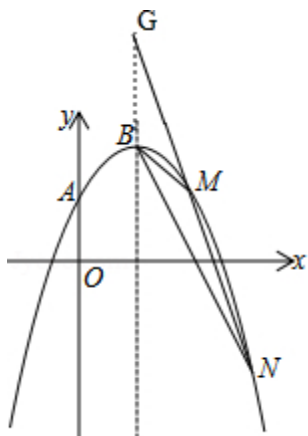


图 1

$$\because y = kx - k + 4 = k(x - 1) + 4,$$

$\therefore$ 当 $x=1$ 时, $y=4$, 即该直线所过定点 G 坐标为 $(1, 4)$,

$$\because y = -x^2 + 2x + 1 = -(x - 1)^2 + 2,$$

$\therefore$ 点 $B(1, 2)$,

则 $BG=2$,

$$\because S_{\triangle BMN} = 1, \text{ 即 } S_{\triangle BNG} - S_{\triangle BMG} = \frac{1}{2}BG \cdot x_N - \frac{1}{2}BG \cdot x_M = 1,$$

$$\therefore x_N - x_M = 1,$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx - k + 4 \\ y = -x^2 + 2x + 1 \end{cases} \text{ 得 } x^2 + (k - 2)x - k + 3 = 0,$$

$$\text{解得: } x = \frac{2-k \pm \sqrt{(k-2)^2 - 4(3-k)}}{2} = \frac{2-k \pm \sqrt{k^2 - 8}}{2},$$

$$\text{则 } x_N = \frac{2-k + \sqrt{k^2 - 8}}{2}, \quad x_M = \frac{2-k - \sqrt{k^2 - 8}}{2},$$

$$\text{由 } x_N - x_M = 1 \text{ 得 } \sqrt{k^2 - 8} = 1,$$

$$\therefore k = \pm 3,$$

$$\because k < 0,$$

$$\therefore k = -3;$$

(3) 如图 2,

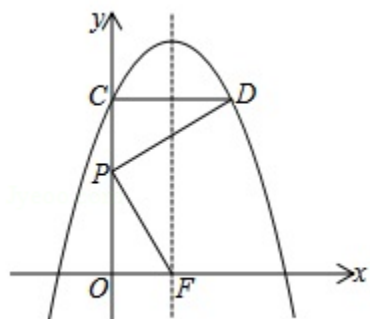


图 2

设抛物线 L_1 的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 1 + m$,

$$\therefore C(0, 1+m), D(2, 1+m), F(1, 0),$$

设 $P(0, t)$,

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \triangle PCD \sim \triangle FOP \text{ 时, } \frac{PC}{CD} = \frac{FO}{OP},$$

$$\therefore \frac{1+m-t}{2} = \frac{1}{t},$$

$$\therefore t^2 - (1+m)t + 2 = 0;$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \triangle PCD \sim \triangle POF \text{ 时, } \frac{PC}{CD} = \frac{PO}{OF},$$

$$\therefore \frac{1+m-t}{2} = \frac{t}{1},$$

$$\therefore t = \frac{1}{3}(m+1);$$

(I) 当方程①有两个相等实数根时,

$$\Delta = (1+m)^2 - 8 = 0,$$

解得： $m = 2\sqrt{2} - 1$ （负值舍去），

此时方程①有两个相等实数根 $t_1 = t_2 = \sqrt{2}$ ，

方程②有一个实数根 $t = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

$$\therefore m = 2\sqrt{2} - 1,$$

此时点 P 的坐标为 $(0, \sqrt{2})$ 和 $(0, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ ；

（II）当方程①有两个不相等的实数根时，

把②代入①，得： $\frac{1}{9}(m+1)^2 - \frac{1}{3}(m+1) + 2 = 0$ ，

解得： $m = 2$ （负值舍去），

此时，方程①有两个不相等的实数根 $t_1 = 1$ 、 $t_2 = 2$ ，

方程①有一个实数根 $t = 1$ ，

$\therefore m = 2$ ，此时点 P 的坐标为 $(0, 1)$ 和 $(0, 2)$ ；

综上，当 $m = 2\sqrt{2} - 1$ 时，点 P 的坐标为 $(0, \sqrt{2})$ 和 $(0, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ ；

当 $m = 2$ 时，点 P 的坐标为 $(0, 1)$ 和 $(0, 2)$ 。

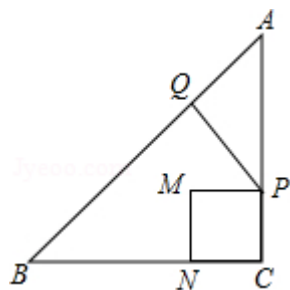
【点评】本题主要考查二次函数的应用，解题的关键是掌握待定系数法求函数解析式、利用割补法求三角形的面积建立关于 k 的方程及相似三角形的判定与性质等知识点。

8. （2018·湖南省衡阳·12分）如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC = 4\text{cm}$ ，动点 P 从点 C 出发以 1cm/s 的速度沿 CA 匀速运动，同时动点 Q 从点 A 出发以 $\sqrt{2}\text{cm/s}$ 的速度沿 AB 匀速运动，当点 P 到达点 A 时，点 P、Q 同时停止运动，设运动时间为 t （s）。

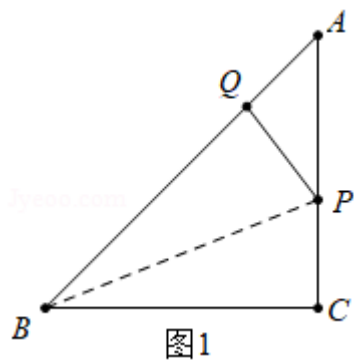
（1）当 t 为何值时，点 B 在线段 PQ 的垂直平分线上？

(2) 是否存在某一时刻 t ，使 $\triangle APQ$ 是以 PQ 为腰的等腰三角形？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由；

(3) 以 PC 为边，往 CB 方向作正方形 $CPMN$ ，设四边形 $QNCP$ 的面积为 S ，求 S 关于 t 的函数关系式。



【解答】解：（1）如图 1 中，连接 BP 。



在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\because AC=BC=4$ ， $\angle C=90^\circ$ ，

$$\therefore AB=4\sqrt{2}$$

$\because$ 点 B 在线段 PQ 的垂直平分线上，

$$\therefore BP=BQ,$$

$$\because AQ=\sqrt{2}t, CP=t,$$

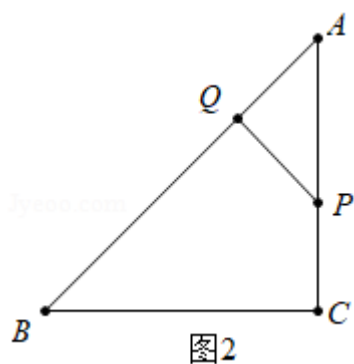
$$\therefore BQ=4\sqrt{2}-\sqrt{2}t, PB^2=4^2+t^2,$$

$$\therefore (4\sqrt{2}-\sqrt{2}t)^2=16+t^2,$$

解得 $t=12-8\sqrt{2}$ 或 $12+8\sqrt{2}$ (舍弃),

$\therefore t=12-8\sqrt{2}$ s 时, 点 B 在线段 PQ 的垂直平分线上.

(2) ①如图 2 中, 当 $PQ=QA$ 时, 易知 $\triangle APQ$ 是等腰直角三角形, $\angle AQP=90^\circ$.

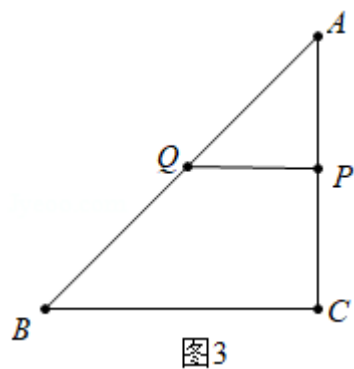


则有 $PA=\sqrt{2}AQ$,

$$\therefore 4-t=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}t,$$

解得 $t=\frac{4}{3}$.

②如图 3 中, 当 $AP=PQ$ 时, 易知 $\triangle APQ$ 是等腰直角三角形, $\angle APQ=90^\circ$.



则有: $AQ=\sqrt{2}AP$,

$$\therefore \sqrt{2}t = \sqrt{2}(4-t),$$

解得 $t=2$,

综上所述: $t=\frac{4}{3}s$ 或 $2s$ 时, $\triangle APQ$ 是以 PQ 为腰的等腰三角形.

(3) 如图 4 中, 连接 QC , 作 $QE \perp AC$ 于 E , 作 $QF \perp BC$ 于 F . 则 $QE=AE$, $QF=EC$, 可得 $QE+QF=AE+EC=AC=4$.

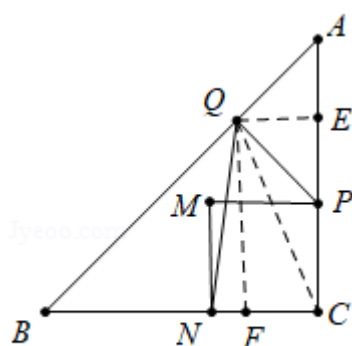
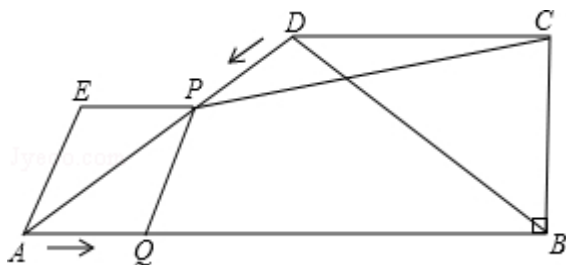


图4

$$\therefore S = S_{\triangle QNC} + S_{\triangle PCQ} = \frac{1}{2} \cdot CN \cdot QF + \frac{1}{2} \cdot PC \cdot QE = \frac{1}{2}t(QE+QF) = 2t \quad (0 < t < 4).$$

9 (2018 · 山东青岛 · 12 分) 已知: 如图, 四边形 $ABCD$, $AB \parallel DC$, $CB \perp AB$, $AB=16\text{cm}$, $BC=6\text{cm}$, $CD=8\text{cm}$, 动点 P 从点 D 开始沿 DA 边匀速运动, 动点 Q 从点 A 开始沿 AB 边匀速运动, 它们的运动速度均为 2cm/s . 点 P 和点 Q 同时出发, 以 QA 、 QP 为边作平行四边形 $AQPE$, 设运动的时间为 t (s), $0 < t < 5$.



根据题意解答下列问题：

- (1) 用含 t 的代数式表示 AP ；
- (2) 设四边形 $CPQB$ 的面积为 S (cm^2)，求 S 与 t 的函数关系式；
- (3) 当 $QP \perp BD$ 时，求 t 的值；
- (4) 在运动过程中，是否存在某一时刻 t ，使点 E 在 $\angle ABD$ 的平分线上？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由。

【分析】(1) 如图作 $DH \perp AB$ 于 H 则四边形 $DHBC$ 是矩形，利用勾股定理求出 AD 的长即可解决问题；

(2) 作 $PN \perp AB$ 于 N ，连接 PB ，根据 $S = S_{\triangle PQB} + S_{\triangle BCP}$ ，计算即可；

(3) 当 $PQ \perp BD$ 时， $\angle PQN + \angle DBA = 90^\circ$ ， $\angle QPN + \angle PQN = 90^\circ$ ，推出 $\angle QPN = \angle DBA$ ，推出 $\tan \angle QPN = \frac{QN}{PN} = \frac{3}{5}$ ，由此构建方程即可解答题目；

(4) 存在．连接 BE 交 DH 于 K ，作 $KM \perp BD$ 于 M ．当 BE 平分 $\angle ABD$ 时， $\triangle KBH \cong \triangle KBM$ ，推出 $KH = KM$ ， $BH = BM = 8$ ，设 $KH = KM = x$ ，在 $\text{Rt} \triangle DKM$ 中， $(6 - x)^2 = 2^2 + x^2$ ，解得 $x = \frac{8}{3}$ ，作 $EF \perp AB$ 于 F ，则 $\triangle AEF \cong \triangle QPN$ ，推出 $EF = PN = \frac{3}{5}(10 - 2t)$ ， $AF = QN = \frac{4}{5}(10 - 2t) - 2t$ ，推出 $BF = 16 - [\frac{4}{5}(10 - 2t) - 2t]$ ，由 $KH \parallel EF$ ，可得 $\frac{KH}{EF} = \frac{BH}{BF}$ ，由此构建方程即可解决问题；

【解答】解：(1) 如图作 $DH \perp AB$ 于 H ，则四边形 $DHBC$ 是矩形，

$\therefore CD = BH = 8$ ， $DH = BC = 6$ ，

$$\therefore AH=AB-BH=8, AD=\sqrt{DH^2+AH^2}=10, BD=\sqrt{CD^2+BC^2}=10,$$

由题意 $AP=AD-DP=10-2t$.

(2) 作 $PN \perp AB$ 于 N . 连接 PB . 在 $Rt\triangle APN$ 中, $PA=10-2t$,

$$\therefore PN=PA \cdot \sin \angle DAH = \frac{3}{5}(10-2t), AN=PA \cdot \cos \angle DAH = \frac{4}{5}(10-2t),$$

$$\therefore BN=16-AN=16-\frac{4}{5}(10-2t),$$

$$S=S_{\triangle PQB}+S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2} \cdot (16-2t) \cdot \frac{3}{5}(10-2t) + \frac{1}{2} \times 6 \times [16-\frac{3}{5}(10-2t)] = \frac{6}{5}t^2 - 12t + 78$$

(3) 当 $PQ \perp BD$ 时, $\angle PQN + \angle DBA = 90^\circ$,

$$\therefore \angle QPN + \angle PQN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QPN = \angle DBA,$$

$$\therefore \tan \angle QPN = \frac{QN}{PN} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{\frac{4}{5}(10-2t)-2t}{\frac{3}{5}(10-2t)} = \frac{3}{5},$$

$$\text{解得 } t = \frac{55}{36},$$

经检验: $t = \frac{55}{36}$ 是分式方程的解,

$\therefore$ 当 $t = \frac{55}{36}$ s 时, $PQ \perp BD$.

(4) 存在.

理由: 连接 BE 交 DH 于 K, 作 $KM \perp BD$ 于 M.

当 BE 平分 $\angle ABD$ 时, $\triangle KBH \cong \triangle KBM$,

$\therefore KH = KM$, $BH = BM = 8$, 设 $KH = KM = x$,

在 $Rt\triangle DKM$ 中, $(6 - x)^2 = 2^2 + x^2$,

解得 $x = \frac{8}{3}$,

作 $EF \perp AB$ 于 F, 则 $\triangle AEF \cong \triangle QPN$,

$\therefore EF = PN = \frac{3}{5}(10 - 2t)$, $AF = QN = \frac{4}{5}(10 - 2t) - 2t$,

$\therefore BF = 16 - [\frac{4}{5}(10 - 2t) - 2t]$,

$\because KH \parallel EF$,

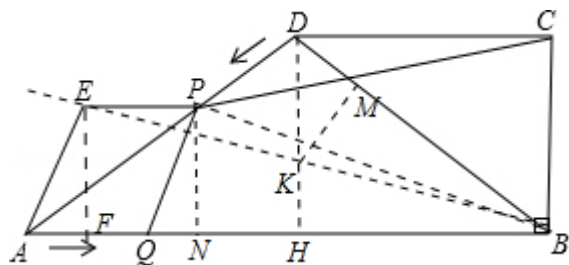
$\therefore \frac{KH}{EF} = \frac{BH}{BF}$,

$\therefore \frac{\frac{8}{3}}{\frac{3}{5}(10 - 2t)} = \frac{8}{16 - [\frac{4}{5}(10 - 2t) - 2t]}$,

解得: $t = \frac{25}{18}$,

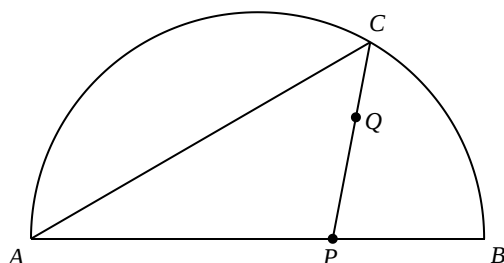
经检验: $t = \frac{25}{18}$ 是分式方程的解,

$\therefore$ 当 $t = \frac{25}{18}s$ 时, 点 E 在 $\angle ABD$ 的平分线.



【点评】本题考查四边形综合题，解直角三角形、锐角三角函数、全等三角形的判定和性质、平行线分线段成比例定理等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形或全等三角形解决问题，学会理由参数构建方程解决问题，属于中考压轴题．

10. （2018•北京•6分）如图， Q 是 AB 与弦 AB 所围成的图形的内部的一定点， P 是弦 AB 上一动点，连接 PQ 并延长交 AB 于点 C ，连接 AC ．已知 $AB=6\text{cm}$ ，设 A ， P 两点间的距离为 $x\text{ cm}$ ， P ， C 两点间的距离为 $y_1\text{ cm}$ ， A ， C 两点间的距离为 $y_2\text{ cm}$ ．



小腾根据学习函数的经验，分别对函数 y_1 ， y_2 随自变量 x 的变化而变化的规律进行了探究．

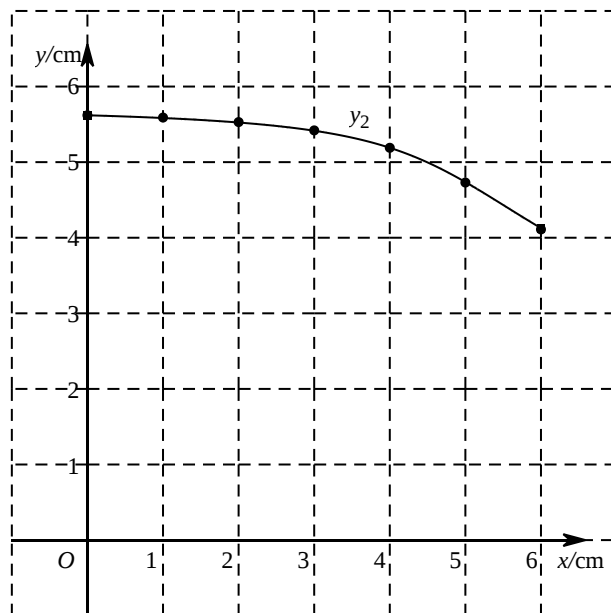
下面是小腾的探究过程，请补充完整：

- （1）按照下表中自变量 x 的值进行取点、画图、测量，分别得到了 y_1 ， y_2 与 x 的几组对应值；

x/cm	0	1	2	3	4	5	6
y_1/cm	5.62	4.67	3.76		2.65	3.18	4.37

y_2 / cm	5.62	5.59	5.53	5.42	5.19	4.73	4.11
-------------------	------	------	------	------	------	------	------

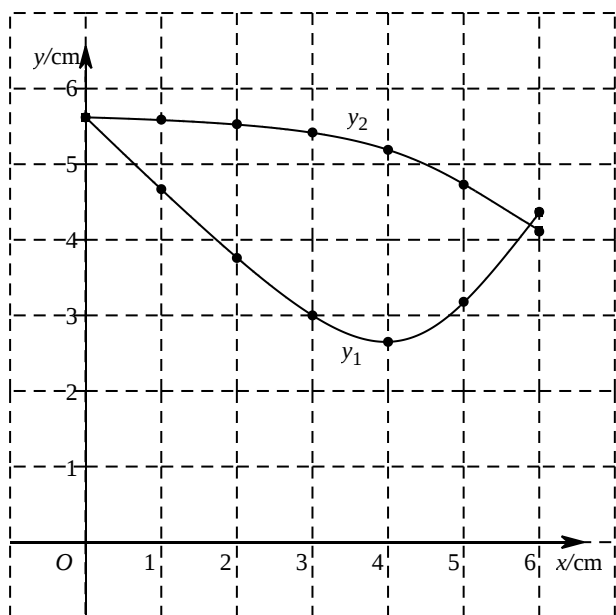
- (2) 在同一平面直角坐标系 xOy 中，描出补全后的表中各组数值所对应的点 (x, y_1) ， (x, y_2) ，并画出函数 y_1 ， y_2 的图象；



- (3) 结合函数图象，解决问题：当 $\triangle APC$ 为等腰三角形时， AP 的长度约为____ cm .

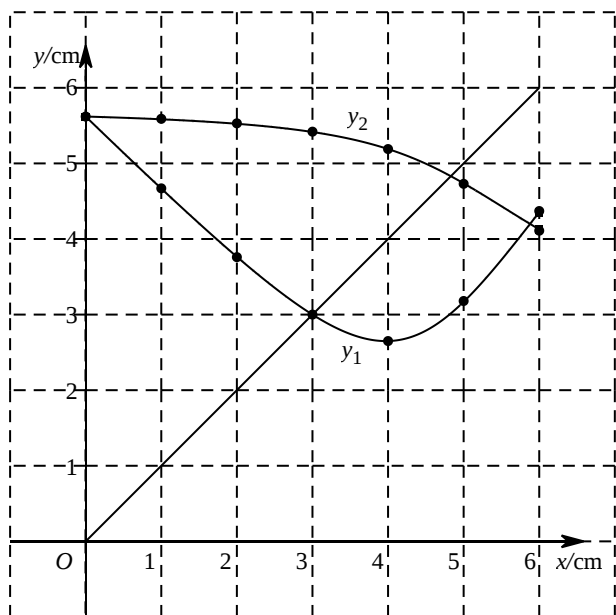
【解析】(1) 3.00

- (2) 如下图所示：



(3) 3.00 或 4.83 或 5.88 .

如下图所示，个函数图象的交点的横坐标即为所求.



【考点】动点产生的函数图象问题，函数探究

11. (2018 年江苏省南京市) 结果如此巧合!

下面是小颖对一道题目的解答.

题目: 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 的内切圆与斜边 AB 相切于点 D , $AD=3$, $BD=4$,

求 $\triangle ABC$ 的面积.

解: 设 $\triangle ABC$ 的内切圆分别与 AC 、 BC 相切于点 E 、 F , CE 的长为 x .

根据切线长定理, 得 $AE=AD=3$, $BF=BD=4$, $CF=CE=x$.

根据勾股定理, 得 $(x+3)^2 + (x+4)^2 = (3+4)^2$.

整理, 得 $x^2 + 7x = 12$.

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$$

$$= \frac{1}{2} (x+3) (x+4)$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 + 7x + 12)$$

$$= \frac{1}{2} \times (12 + 12)$$

$$= 12.$$

小颖发现 12 恰好就是 3×4 , 即 $\triangle ABC$ 的面积等于 AD 与 BD 的积. 这仅仅是巧合吗?

请你帮她完成下面的探索.

已知: $\triangle ABC$ 的内切圆与 AB 相切于点 D , $AD=m$, $BD=n$.

可以一般化吗?

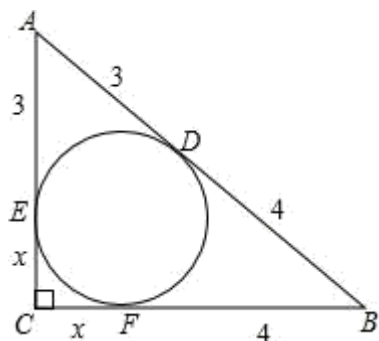
(1) 若 $\angle C = 90^\circ$, 求证: $\triangle ABC$ 的面积等于 mn .

倒过来思考呢?

(2) 若 $AC \cdot BC = 2mn$ ，求证 $\angle C = 90^\circ$.

改变一下条件……

(3) 若 $\angle C = 60^\circ$ ，用 m 、 n 表示 $\triangle ABC$ 的面积.



【分析】(1) 由切线长知 $AE=AD=m$ 、 $BF=BD=n$ 、 $CF=CE=x$ ，根据勾股定理得 $(x+m)^2 + (x+n)^2 = (m+n)^2$ ，即 $x^2 + (m+n)x = mn$ ，再利用三角形的面积公式计算可得；

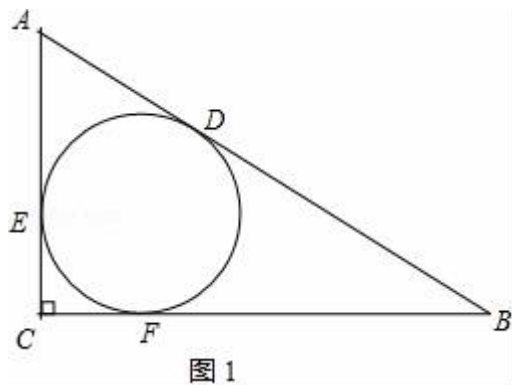
(2) 由 $AC \cdot BC = 2mn$ 得 $(x+m)(x+n) = 2mn$ ，即 $x^2 + (m+n)x = mn$ ，再利用勾股定理逆定理求证即可；

(3) 作 $AG \perp BC$ ，由三角函数得 $AG = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+m)$ ， $CG = AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}(x+m)$ 、 $BG = BC - CG = (x+n) - \frac{1}{2}(x+m)$ ，在 $Rt\triangle ABG$ 中，根据勾股定理可得 $x^2 + (m+n)x = 3mn$ ，最后利用三角形的面积公式计算可得.

【解答】解：设 $\triangle ABC$ 的内切圆分别与 AC 、 BC 相切于点 E 、 F ， CE 的长为 x ，

根据切线长定理，得： $AE=AD=m$ 、 $BF=BD=n$ 、 $CF=CE=x$ ，

(1) 如图 1，



在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，根据勾股定理，得： $(x+m)^2 + (x+n)^2 = (m+n)^2$ ，

整理，得： $x^2 + (m+n)x = mn$ ，

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC$ [来源：*中^国教育出^版网]

$$= \frac{1}{2}(x+m)(x+n)$$

$$= \frac{1}{2}[x^2 + (m+n)x + mn]$$

$$= \frac{1}{2}(mn + mn)$$

$$= mn,$$

[中*#国&教育^出^版网]

(2) 由 $AC \cdot BC = 2mn$ ，得： $(x+m)(x+n) = 2mn$ ，

整理，得： $x^2 + (m+n)x = mn$ ，

$$\therefore AC^2 + BC^2 = (x+m)^2 + (x+n)^2$$

$$= 2[x^2 + (m+n)x] + m^2 + n^2$$

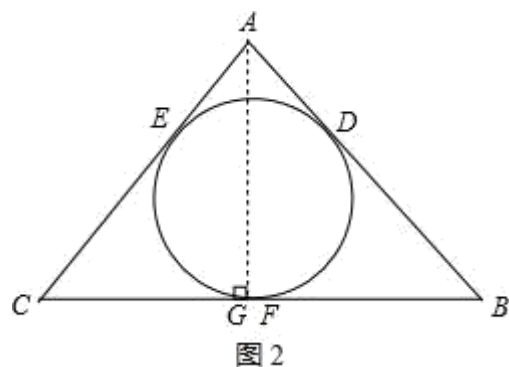
$$= 2mn + m^2 + n^2$$

$$= (m+n)^2$$

$$=AB^2,$$

根据勾股定理逆定理可得 $\angle C=90^\circ$ ；

(3) 如图 2，过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G，



$$\text{在 Rt}\triangle ACG \text{ 中, } AG=AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} (x+m), \quad CG=AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} (x+m),$$

$$\therefore BG=BC - CG= (x+n) - \frac{1}{2} (x+m),$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABG \text{ 中, 根据勾股定理可得: } \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (x+m) \right]^2 + \left[(x+n) - \frac{1}{2} (x+m) \right]^2 = (m+n)^2,$$

整理, 得: $x^2 + (m+n)x = 3mn$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AG$$

$$= \frac{1}{2} \times (x+n) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (x+m)$$

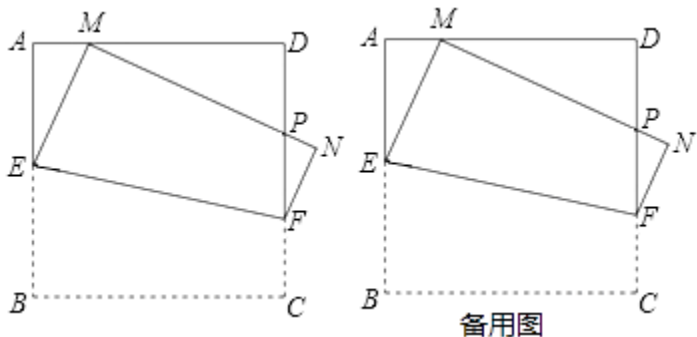
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} [x^2 + (m+n)x + mn]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (3mn + mn)$$

$$= \sqrt{3} mn. \quad [\text{中国\&教育*出版\@网}]$$

【点评】本题主要考查圆的综合问题，

12. （2018 年江苏省宿迁）如图，在边长为 1 的正方形 ABCD 中，动点 E、F 分别在边 AB、CD 上，将正方形 ABCD 沿直线 EF 折叠，使点 B 的对应点 M 始终落在边 AD 上（点 M 不与点 A、D 重合），点 C 落在点 N 处，MN 与 CD 交于点 P，设 BE=x，



(1) 当 $AM = \frac{1}{3}$ 时，求 x 的值；

(2) 随着点 M 在边 AD 上位置的变化， $\triangle PDM$ 的周长是否发生变化？如变化，请说明理由；如不变，请求出该定值；

(3) 设四边形 BEFC 的面积为 S，求 S 与 x 之间的函数表达式，并求出 S 的最小值.

【答案】(1) 解：由折叠性质可知：BE=ME=x， $\because$ 正方形 ABCD 边长为 1

$\therefore AE = 1 - x$,

在 $Rt\triangle AME$ 中，

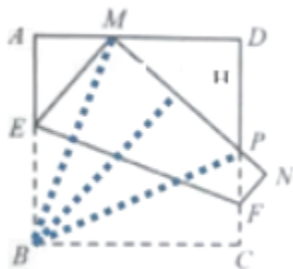
$\therefore AE^2 + AM^2 = ME^2$,

即 $(1-x)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = x^2$,

解得： $x = \frac{5}{9}$.

(2) 解： $\triangle PDM$ 的周长不会发生变化，且为定值 2.

连接 BM、BP，过点 B 作 $BH \perp MN$ ，



$\because BE=ME,$

$\therefore \angle EBM=\angle EMB,$

又 $\because \angle EBC=\angle EMN=90^\circ,$

即 $\angle EBM+\angle MBC=\angle EMB+\angle BMN=90^\circ,$

$\therefore \angle MBC=\angle BMN,$

又 $\because$ 正方形 ABCD,

$\therefore AD\parallel BC, AB=BC,$

$\therefore \angle AMB=\angle MBC=\angle BMN,$

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 和 $\text{Rt}\triangle HBM$ 中,

$$\because \begin{cases} \angle A = \angle BHM = 90^\circ \\ \angle AMB = \angle BMN \\ BM = BM \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle HBM$ (AAS),

$\therefore AM=HM, AB=HB=BC,$

在 $\text{Rt}\triangle BHP$ 和 $\text{Rt}\triangle BCP$ 中,

$$\because \begin{cases} BP = BP \\ BH = BC, \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BHP \cong \text{Rt}\triangle BCP$ (HL),

$\therefore HP=CP,$

又 $\because C\triangle PDM=MD+DP+MP,$

$$=MD+DP+MH+HP,$$

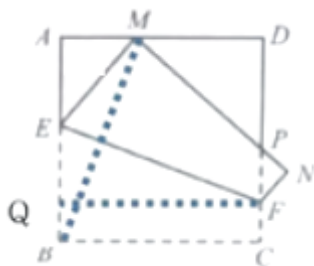
$$=MD+DP+AM+PC,$$

$$=AD+DC,$$

$$=2.$$

$\therefore \triangle PDM$ 的周长不会发生变化, 且为定值 2.

(3) 解：过 F 作 $FQ \perp AB$ ，连接 BM，



由折叠性质可知： $\angle BEF = \angle MEF$, $BM \perp EF$,

$$\therefore \angle EBM + \angle BEF = \angle EMB + \angle MEF = \angle QFE + \angle BEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBM = \angle EMB = \angle QFE,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 和 $\text{Rt}\triangle QFE$ 中，

$$\therefore \begin{cases} \angle ABM = \angle QFE \\ AB = QF \\ \angle A = \angle EQF = 90^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle QFE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AM = QE,$$

设 AM 长为 a,

在 $\text{Rt}\triangle AEM$ 中，

$$\therefore AE^2 + AM^2 = EM^2,$$

$$\text{即 } (1-x)^2 + a^2 = x^2,$$

$$\therefore AM = QE = \sqrt{2x-1},$$

$$\therefore BQ = CF = x - \sqrt{2x-1},$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} (CF + BE) \times BC,$$

$$= \frac{1}{2} (x - \sqrt{2x-1} + x) \times 1,$$

$$= \frac{1}{2} (2x - \sqrt{2x-1}),$$

$$\text{又} \because (1-x)^2 + a^2 = x^2,$$

$$\therefore x = \frac{a^2+1}{2} = AM = BE, \quad BQ = CF = \frac{a^2+1}{2} - a,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2+1}{2} - a + \frac{a^2+1}{2} \right) \times 1,$$

$$= \frac{1}{2} (a^2 - a + 1),$$

$$= \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{8},$$

$\because 0 < a < 1,$

$\therefore$ 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, S 最小值 $= \frac{3}{8}$.

【考点】二次函数的最值，全等三角形的判定与性质，勾股定理，正方形的性质，翻折变换（折叠问题）

【解析】【分析】（1）由折叠性质可知 $BE=ME=x$ ，结合已知条件知 $AE=1-x$ ，在 $Rt\triangle AME$ 中，根据勾股定理得 $(1-x)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = x^2$ ，解得： $x = \frac{5}{9}$.

（2） $\triangle PDM$ 的周长不会发生变化，且为定值 2. 连接 BM 、 BP ，过点 B 作 $BH \perp MN$ ，根据折叠性质知 $BE=ME$ ，由等边对等角得 $\angle EBM = \angle EMB$ ，由等角的余角相等得 $\angle MBC = \angle BMN$ ，由全等三角形的判定 AAS 得 $Rt\triangle ABM \cong Rt\triangle HBM$ ，根据全等三角形的性质得 $AM=HM$ ， $AB=HB=BC$ ，又根据全等三角形的判定 HL 得 $Rt\triangle BHP \cong Rt\triangle BCP$ ，根据全等三角形的性质得 $HP=CP$ ，由三角形周长和等量代换即可得出 $\triangle PDM$ 周长为定值 2.

（3）过 F 作 $FQ \perp AB$ ，连接 BM ，由折叠性质可知： $\angle BEF = \angle MEF$ ， $BM \perp EF$ ，由等角的余角相等得 $\angle EBM = \angle EMB = \angle QFE$ ，由全等三角形的判定 ASA 得 $Rt\triangle ABM \cong Rt\triangle QFE$ ，据全等三角形的性质得

$AM=QE$ ；设 AM 长为 a ，在 $Rt\triangle AEM$ 中，根据勾股定理得 $(1-x)^2 + a^2 = x^2$ ，从而得 $AM=QE = \sqrt{2x-1}$ ，

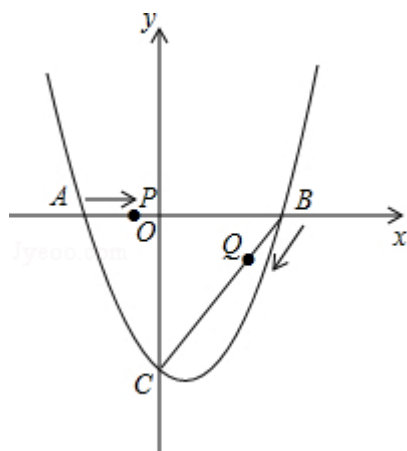
$BQ=CF=x - \sqrt{2x-1}$ ，根据梯形得面积公式代入即可得出 S 与 x 的函数关系式；又由 $(1-x)^2 + a^2 = x^2$ ，得 $x = \frac{a^2+1}{2} = AM=BE$ ， $BQ=CF = \frac{a^2+1}{2} - a$ ($0 < a < 1$)，代入梯形面积公式即可转为关于 a 的二次函数，配方从而求得 S 的最小值.

13. （2018·新疆生产建设兵团·13分）如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 4$ 与 x 轴交于 A ， B 两点（点 A 在点 B 左侧），与 y 轴交于点 C .

(1) 求点 A, B, C 的坐标;

(2) 点 P 从 A 点出发, 在线段 AB 上以每秒 2 个单位长度的速度向 B 点运动, 同时, 点 Q 从 B 点出发, 在线段 BC 上以每秒 1 个单位长度的速度向 C 点运动, 当其中一个点到达终点时, 另一个点也停止运动. 设运动时间为 t 秒, 求运动时间 t 为多少秒时, $\triangle PBQ$ 的面积 S 最大, 并求出其最大面积;

(3) 在 (2) 的条件下, 当 $\triangle PBQ$ 面积最大时, 在 BC 下方的抛物线上是否存在点 M, 使 $\triangle BMC$ 的面积是 $\triangle PBQ$ 面积的 1.6 倍? 若存在, 求点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



【分析】(1) 代入 $x=0$ 可求出点 C 的纵坐标, 代入 $y=0$ 可求出点 A、B 的横坐标, 此题得解;

(2) 根据点 B、C 的坐标, 利用待定系数法可求出直线 BC 的解析式, 过点 Q 作 $QE \parallel y$ 轴, 交 x 轴于点 E, 当运动时间为 t 秒时, 点 P 的坐标为 $(2t - 2, 0)$, 点 Q 的坐标为 $(3 - \frac{3}{5}t, -\frac{4}{5}t)$, 进而可得出 PB、QE 的长度, 利用三角形的面积公式可得出 $S_{\triangle PBQ}$ 关于 t 的函数关系式, 利用二次函数的性质即可解决最值问题;

(3) 根据 (2) 的结论找出点 P、Q 的坐标, 假设存在, 设点 M 的坐标为 $(m, \frac{2}{3}m^2 - \frac{2}{3}m - 4)$, 则点 F 的坐标为 $(m, \frac{4}{3}m - 4)$, 进而可得出 MF 的长度, 利用三角形的面积结合 $\triangle BMC$ 的面积是 $\triangle PBQ$ 面积的 1.6 倍, 可得出关于 m 的一元二次方程, 解之即可得出结论.

【解答】解: (1) 当 $x=0$ 时, $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 4 = -4$,

∴点 C 的坐标为 (0, -4) ;

当 $y=0$ 时, 有 $\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 4=0$,

解得: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$,

∴点 A 的坐标为 (-2, 0), 点 B 的坐标为 (3, 0) .

(2) 设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) ,

将 B (3, 0)、C (0, -4) 代入 $y=kx+b$,

$$\begin{cases} 3k+b=0 \\ b=-4 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k=\frac{4}{3} \\ b=-4 \end{cases}$$

∴直线 BC 的解析式为 $y=\frac{4}{3}x - 4$.

过点 Q 作 $QE \parallel y$ 轴, 交 x 轴于点 E, 如图 1 所示,

当运动时间为 t 秒时, 点 P 的坐标为 $(2t - 2, 0)$, 点 Q 的坐标为 $(3 - \frac{3}{5}t, -\frac{4}{5}t)$,

∴ $PB = 3 - (2t - 2) = 5 - 2t$, $QE = \frac{4}{5}t$,

∴ $S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2}PB \cdot QE = -\frac{4}{5}t^2 + 2t = -\frac{4}{5}(t - \frac{5}{4})^2 + \frac{5}{4}$.

∵ $-\frac{4}{5} < 0$,

∴当 $t = \frac{5}{4}$ 时, $\triangle PBQ$ 的面积取最大值, 最大值为 $\frac{5}{4}$.

(3) 当 $\triangle PBQ$ 面积最大时, $t = \frac{5}{4}$,

此时点 P 的坐标为 $(\frac{1}{2}, 0)$, 点 Q 的坐标为 $(\frac{9}{4}, -1)$.

假设存在，设点 M 的坐标为 $(m, \frac{2}{3}m^2 - \frac{2}{3}m - 4)$ ，则点 F 的坐标为 $(m, \frac{4}{3}m - 4)$ ，

$$\therefore MF = \frac{4}{3}m - 4 - (\frac{2}{3}m^2 - \frac{2}{3}m - 4) = -\frac{2}{3}m^2 + 2m,$$

$$\therefore S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2}MF \cdot OB = -m^2 + 3m.$$

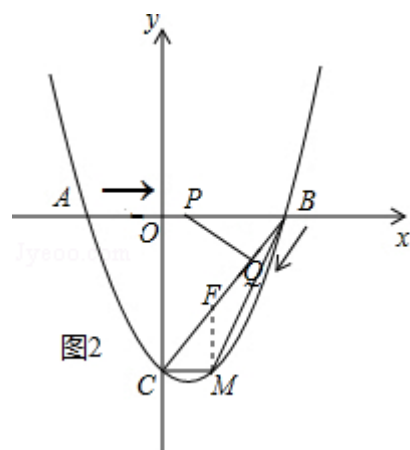
$\because \triangle BMC$ 的面积是 $\triangle PBQ$ 面积的 1.6 倍，

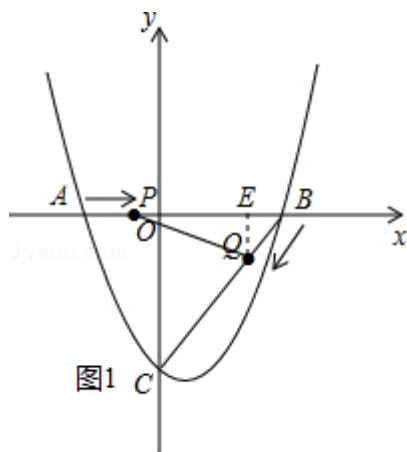
$$\therefore -m^2 + 3m = \frac{5}{4} \times 1.6, \text{ 即 } m^2 - 3m + 2 = 0,$$

解得： $m_1 = 1, m_2 = 2$.

$$\because 0 < m < 3,$$

$\therefore$ 在 BC 下方的抛物线上存在点 M，使 $\triangle BMC$ 的面积是 $\triangle PBQ$ 面积的 1.6 倍，点 M 的坐标为 $(1, -4)$ 或 $(2, -\frac{8}{3})$.





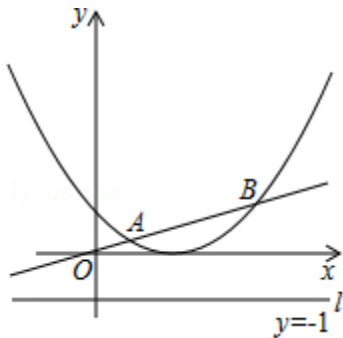
【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征、二次函数的性质、二次（一次）函数图象上点的坐标特征、待定系数法求一次函数解析式以及三角形的面积，解题的关键是：（1）利用二次函数图象上点的坐标特征求出点 A、B、C 的坐标；（2）利用三角形的面积公式找出 $S_{\triangle PBQ}$ 关于 t 的函数关系式；（3）利用三角形的面积结合 $\triangle BMC$ 的面积是 $\triangle PBQ$ 面积的 1.6 倍，找出关于 m 的一元二次方程.

14 (2018 · 四川宜宾 · 12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线的顶点坐标为 $(2, 0)$, 且经过点 $(4, 1)$, 如图, 直线 $y = \frac{1}{4}x$ 与抛物线交于 A、B 两点, 直线 l 为 $y = -1$.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 在 l 上是否存在一点 P , 使 $PA+PB$ 取得最小值? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

(3) 知 $F(x_0, y_0)$ 为平面内一定点, $M(m, n)$ 为抛物线上一动点, 且点 M 到直线 l 的距离与点 M 到点 F 的距离总是相等, 求定点 F 的坐标.



【考点】HF：二次函数综合题.

【分析】（1）由抛物线的顶点坐标为（2，0），可设抛物线的解析式为 $y=a(x-2)^2$ ，由抛物线过点（4，1），利用待定系数法即可求出抛物线的解析式；

（2）联立直线 AB 与抛物线解析式成方程组，通过解方程组可求出点 A、B 的坐标，作点 B 关于直线 l 的对称点 B'，连接 AB' 交直线 l 于点 P，此时 PA+PB 取得最小值，根据点 B 的坐标可得出点 B' 的坐标，根据点 A、B' 的坐标利用待定系数法可求出直线 AB' 的解析式，再利用一次函数图象上点的坐标特征即可求出点 P 的坐标；

（3）由点 M 到直线 l 的距离与点 M 到点 F 的距离总是相等结合二次函数图象上点的坐标特征，即可得出 $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_0)m^2 - (2 - 2x_0 - 2y_0)m + x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 - 3 = 0$ ，由 m 的任意性可得出关于 x_0 、 y_0 的方程组，解之即可求出顶点 F 的坐标.

【解答】解：（1） $\because$ 抛物线的顶点坐标为（2，0），

设抛物线的解析式为 $y=a(x-2)^2$.

$\because$ 该抛物线经过点（4，1），

$\therefore 1=4a$ ，解得： $a=\frac{1}{4}$ ，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{4}(x-2)^2=\frac{1}{4}x^2-x+1$.

（2）联立直线 AB 与抛物线解析式成方程组，得：

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x \\ y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 1 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = \frac{1}{4} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 1 \end{cases},$$

∴点 A 的坐标为 $(1, \frac{1}{4})$ ，点 B 的坐标为 $(4, 1)$ 。

作点 B 关于直线 l 的对称点 B'，连接 AB' 交直线 l 于点 P，此时 PA+PB 取得最小值（如图 1 所示）。

∵点 B $(4, 1)$ ，直线 l 为 $y = -1$ ，

∴点 B' 的坐标为 $(4, -3)$ 。

设直线 AB' 的解析式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)，

将 A $(1, \frac{1}{4})$ 、B' $(4, -3)$ 代入 $y = kx + b$ ，得：

$$\begin{cases} k + b = \frac{1}{4} \\ 4k + b = -3 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{13}{12} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases},$$

∴直线 AB' 的解析式为 $y = -\frac{13}{12}x + \frac{4}{3}$ ，

当 $y = -1$ 时，有 $-\frac{13}{12}x + \frac{4}{3} = -1$ ，

解得： $x = \frac{28}{13}$ ，

∴点 P 的坐标为 $(\frac{28}{13}, -1)$ 。

(3) ∵点 M 到直线 l 的距离与点 M 到点 F 的距离总是相等，

$$\therefore (m - x_0)^2 + (n - y_0)^2 = (n+1)^2,$$

$$\therefore m^2 - 2x_0m + x_0^2 - 2y_0n + y_0^2 = 2n + 1.$$

∵M (m, n) 为抛物线上一动点,

$$\therefore n = \frac{1}{4}m^2 - m + 1,$$

$$\therefore m^2 - 2x_0m + x_0^2 - 2y_0 \left(\frac{1}{4}m^2 - m + 1 \right) + y_0^2 = 2 \left(\frac{1}{4}m^2 - m + 1 \right) + 1,$$

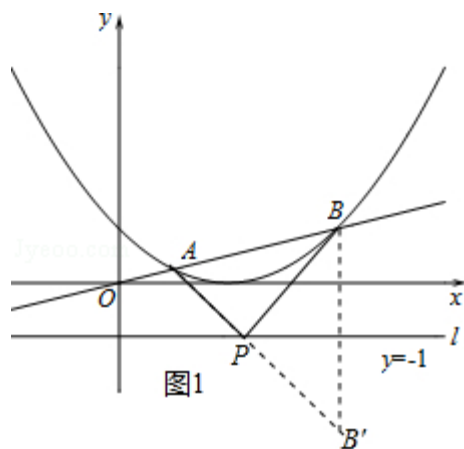
$$\text{整理得: } \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_0 \right) m^2 - (2 - 2x_0 - 2y_0) m + x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 - 3 = 0.$$

∵m 为任意值,

$$\therefore \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_0 = 0 \\ 2 - 2x_0 - 2y_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 - 3 = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases},$$

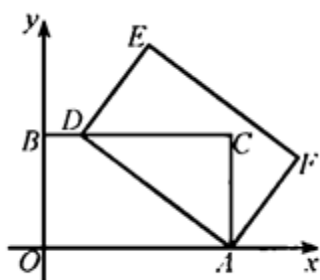
∴定点 F 的坐标为 (2, 1) .



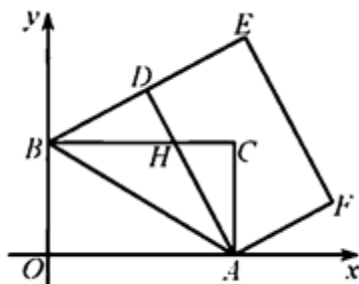
【点评】本题考查了待定系数法求二次（一次）函数解析式、二次（一次）函数图象上点的坐标特征、轴对称中的最短路径问题以及解方程组，解题的关键是：（1）根据点的坐标，利用待定系数法求出二次函数解析式；（2）利用两点之间线段最短找出点 P 的位置；（3）根据点 M 到直线

1 的距离与点 M 到点 F 的距离总是相等结合二次函数图象上点的坐标特征，找出关于 x_0 、 y_0 的方程组.

15. (2018·天津·10 分) 在平面直角坐标系中，四边形 AOB C 是矩形，点 O(0,0)，点 A(5,0)，点 B(0,3). 以点 A 为中心，顺时针旋转矩形 AOB C，得到矩形 ADEF，点 A，B，C 的对应点分别为 A，D，E，F.



图①



图②

(I) 如图①，当点 D 落在 BC 边上时，求点 E 的坐标；

(II) 如图②，当点 D 落在线段 BE 上时，AD 与 BC 交于点 H.

①求证 $\triangle ADB \cong \triangle AOB$ ；

②求点 E 的坐标.

(III) 记 G 为矩形 AOB C 对角线的交点，S 为 $\triangle KDE$ 的面积，求 S 的取值范围 (直接写出结果即可).

【答案】(I) 点 E 的坐标为 (1,3). (II) ①证明见解析；②点 E 的坐标为 $(\frac{17}{5}, 3)$. (III)

$$\frac{30-3\sqrt{34}}{4} \leq S \leq \frac{30+3\sqrt{34}}{4}.$$

【解析】分析：(I) 根据旋转的性质得 $AD=AO=5$ ，设 $CD=x$ ，在直角三角形 ACD 中运用勾股定理可求 CD 的值，从而可确定 D 点坐标；

(II) ①根据直角三角形全等的判定方法进行判定即可；

②由①知 $\angle BAD = \angle BAO$ ，再根据矩形的性质得 $\angle CBA = \angle OAB$. 从而 $\angle BAD = \angle CBA$ ，故 $BH=AH$ ，在 $Rt\triangle ACH$ 中，运用勾股定理可求得 AH 的值，进而求得答案；

$$(III) \frac{30-3\sqrt{34}}{4} \leq S \leq \frac{30+3\sqrt{34}}{4}.$$

详解：(I) $\because$ 点 A(5,0)，点 B(0,3)，

$$\therefore OA = 5, OB = 3.$$

$\because$ 四边形 AOB C 是矩形，

$$\therefore AC = OB = 3, BC = OA = 5, \angle OBC = \angle C = 90^\circ.$$

$\because$ 矩形 ADEF 是由矩形 AOB C 旋转得到的，

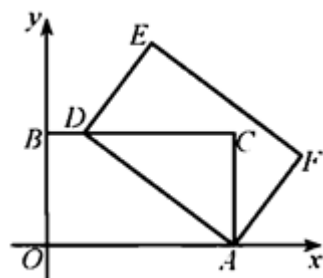
$$\therefore AD = AO = 5.$$

在Rt $\triangle ADC$ 中, 有 $AD^2 = AC^2 + DC^2$,

$$\therefore DC = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

$$\therefore BD = BC - DC = 1.$$

$\therefore$ 点的坐标为(1,3).



(II) ①由四边形ADEF是矩形, 得 $\angle ADE = 90^\circ$.

又点在线段BE上, 得 $\angle ADB = 90^\circ$.

由(I)知, $AD = AO$, 又 $AB = AB$, $\angle AOB = 90^\circ$,

$$\therefore \text{Rt } \triangle ADB \cong \text{Rt } \triangle AOB.$$

②由 $\triangle ADB \cong \triangle AOB$, 得 $\angle BAD = \angle BAO$.

又在矩形AOBC中, $OA \parallel BC$,

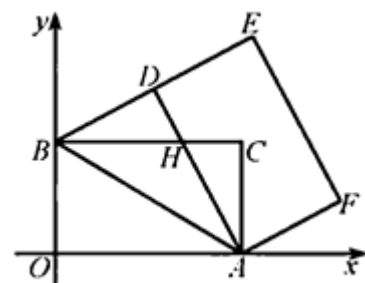
$$\therefore \angle CBA = \angle OAB. \therefore \angle BAD = \angle CBA. \therefore BH = AH.$$

设 $BH = t$, 则 $AH = t$, $HC = BC - BH = 5 - t$.

在Rt $\triangle AHC$ 中, 有 $AH^2 = AC^2 + HC^2$,

$$\therefore t^2 = 3^2 + (5 - t)^2. \text{解得 } t = \frac{17}{5}. \therefore BH = \frac{17}{5}.$$

$\therefore$ 点的坐标为 $(\frac{17}{5}, 3)$.



$$(III) \frac{30 - 3\sqrt{34}}{4} \leq S \leq \frac{30 + 3\sqrt{34}}{4}.$$

点睛：本大题主要考查了等腰三角形的判定和性质，勾股定理以及旋转变换的性质等知识，灵活运用勾股定理求解是解决本题的关键.

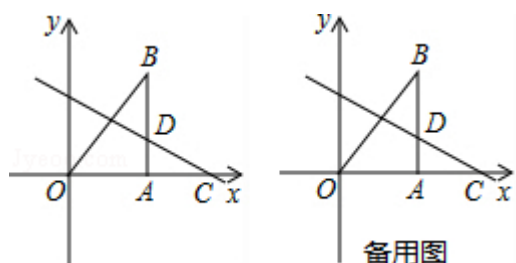
16. (2018·浙江衢州·10分) (12分) 如图， $Rt\triangle OAB$ 的直角边 OA 在 x 轴上，顶点 B 的坐标为 $(6, 8)$ ，直线 CD 交 AB 于点 $D(6, 3)$ ，交 x 轴于点 $C(12, 0)$ 。

(1) 求直线 CD 的函数表达式；

(2) 动点 P 在 x 轴上从点 $(-10, 0)$ 出发，以每秒 1 个单位的速度向 x 轴正方向运动，过点 P 作直线 l 垂直于 x 轴，设运动时间为 t 。

①点 P 在运动过程中，是否存在某个位置，使得 $\angle PDA = \angle B$ ？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由；

②请探索当 t 为何值时，在直线 l 上存在点 M ，在直线 CD 上存在点 Q ，使得以 OB 为一边， O, B, M, Q 为顶点的四边形为菱形，并求出此时 t 的值。



【考点】一次函数、待定系数法、菱形的判定、平行线分线段成比例定理

【分析】(1) 利用待定系数法即可解决问题；

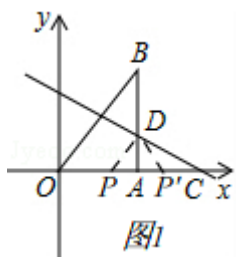
(2) ①如图 1 中，作 $DP \parallel OB$ ，则 $\angle PDA = \angle B$ 。利用平行线分线段成比例定理，计算即可，再根据对称性求出 P' ；

②分两种情形分别求解即可解决问题：如图 2 中，当 $OP = OB = 10$ 时，作 $PQ \parallel OB$ 交 CD 于 Q 。如图 3 中，当 $OQ = OB$ 时，设 $Q(m, -\frac{1}{2}m + 6)$ ，构建方程求出点 Q 坐标即可解决问题；

【解答】解：（1）设直线 CD 的解析式为 $y=kx+b$ ，则有 $\begin{cases} 12k+b=0 \\ 6k+b=3 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} k=-\frac{1}{2} \\ b=6 \end{cases}$ ， $\therefore$ 直线 CD 的

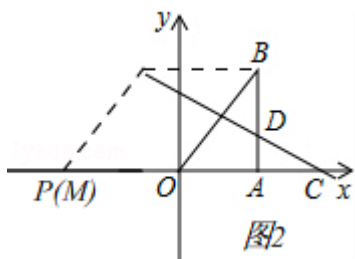
解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+6$.

（2）①如图 1 中，作 $DP \parallel OB$ ，则 $\angle PDA = \angle B$.



$\because DP \parallel OB$, $\therefore \frac{PA}{AO} = \frac{AD}{AB}$, $\therefore \frac{PA}{6} = \frac{3}{8}$, $\therefore PA = \frac{9}{4}$, $\therefore OP = 6 - \frac{9}{4} = \frac{15}{4}$, $\therefore P(\frac{15}{4}, 0)$, 根据对称性可知, 当 $AP = AP'$ 时, $P'(\frac{39}{4}, 0)$, $\therefore$ 满足条件的点 P 坐标为 $(\frac{15}{4}, 0)$ 或 $(\frac{39}{4}, 0)$.

②如图 2 中, 当 $OP = OB = 10$ 时, 作 $PQ \parallel OB$ 交 CD 于 Q.

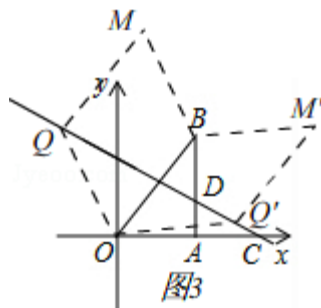


$\because$ 直线 OB 的解析式为 $y=\frac{4}{3}x$, $\therefore$ 直线 PQ 的解析式为 $y=\frac{4}{3}x+\frac{40}{3}$, 由 $\begin{cases} y=\frac{4}{3}x+\frac{40}{3} \\ y=-\frac{1}{2}x+6 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=-4 \\ y=8 \end{cases}$,

$\therefore Q(-4, 8)$, $\therefore PQ = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, $\therefore PQ = OB$.

$\because PQ \parallel OB$, $\therefore$ 四边形 OBQP 是平行四边形.

$\because OB = OP$, $\therefore$ 四边形 OBQP 是菱形, 此时点 M 与 Q 重合, 满足条件, $t=0$.



如图 3 中，当 $OQ=OB$ 时，设 $Q(m, -\frac{1}{2}m+6)$ ，

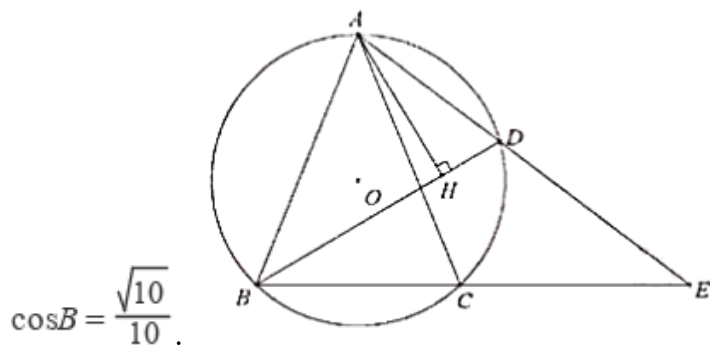
则有 $m^2 + (-\frac{1}{2}m+6)^2 = 10^2$ ，解得 $m = \frac{12 \pm \sqrt{89}}{5}$ ， $\therefore$ 点 Q 的横坐标为 $\frac{12+\sqrt{89}}{5}$ 或 $\frac{12-\sqrt{89}}{5}$ ，设点 M

的横坐标为 a ，则有： $\frac{a+0}{2} = \frac{\frac{12+\sqrt{89}}{5}+6}{2}$ 或 $\frac{a+0}{2} = \frac{\frac{12-\sqrt{89}}{5}+6}{2}$ ， $\therefore a = \frac{42+\sqrt{89}}{5}$ 或 $\frac{42-\sqrt{89}}{5}$ ， $\therefore$ 满

足条件的 t 的值为 $\frac{92+\sqrt{89}}{5}$ 或 $\frac{92-\sqrt{89}}{5}$ 。

【点评】本题考查了一次函数综合题、待定系数法、菱形的判定、平行线分线段成比例定理等知识，解题的关键是学会由分类讨论的思想思考问题，学会构建一次函数，利用方程组确定两个函数的交点坐标，所以中考压轴题。

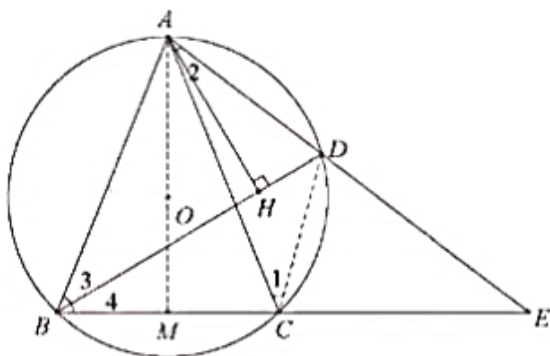
17（2018•广东深圳•9分）如图：在 $\odot O$ 中， $BC=2$, $AB=AC$ ，点 D 为 AC 上的动点，且



(1) 求 AB 的长度；

(2) 求 $AD \cdot AE$ 的值；

【答案】 (1) 解: 作 $AM \perp BC$,



∵ AB=AC, BC=2, AM⊥BC, [中*国教^&%育#出版网]

∴BM=CM= $\frac{1}{2}$ BC=1, [来&#源%:中国^教~育出版网]

$$\therefore \cos B = \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{10}}{10}, BM=1,$$

$$\therefore AB = BM \div \cos B = 1 \div \frac{\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}.$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ABC,$$

$\therefore$ 四边形 ABCD 内接于圆 O,

$$\therefore \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ, \text{ 又 } \because \angle ACE + \angle ACB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ACE,$$

$$\because \angle CAE = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle EAC \sim \triangle CAD,$$

(2) 连接 CD, 根据等腰三角形性质等边对等角得 $\angle ACB = \angle ABC$, 再由圆内接四边形性质和等角的补角相等得 $\angle ADC = \angle ACE$; 由相似三角形的判定得 $\triangle EAC \sim \triangle CAD$, 根据相似三角形的性质得

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AC}; \quad \text{从而得 } AD \cdot AE = AC^2 = AB^2.$$

(3) 在 BD 上取一点 N, 使得 $BN = CD$, 根据 SAS 得 $\triangle ABN \cong \triangle ACD$, 再由全等三角形的性质得 $AN = AD$, 根据等腰三角形三线合一的性质得 $NH = DH$, 从而得 $BH = BN + NH = CD + DH$.

18. (2018 • 广东 • 9 分) 已知 $\text{Rt}\triangle OAB$, $\angle OAB = 90^\circ$, $\angle ABO = 30^\circ$, 斜边 $OB = 4$, 将 $\text{Rt}\triangle OAB$ 绕点 O 顺时针旋转 60° , 如题图 1, 连接 BC.

(1) 填空: $\angle OBC = \underline{60}^\circ$;

(2) 如图 1, 连接 AC, 作 $OP \perp AC$, 垂足为 P, 求 OP 的长度;

(3) 如图 2, 点 M, N 同时从点 O 出发, 在 $\triangle OCB$ 边上运动, M 沿 $O \rightarrow C \rightarrow B$ 路径匀速运动, N 沿 $O \rightarrow B \rightarrow C$ 路径匀速运动, 当两点相遇时运动停止, 已知点 M 的运动速度为 1.5 单位/秒, 点 N 的运动速度为 1 单位/秒, 设运动时间为 x 秒, $\triangle OMN$ 的面积为 y, 求当 x 为何值时 y 取得最大值? 最大值为多少?

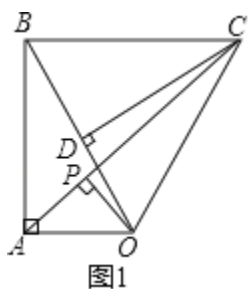


图1

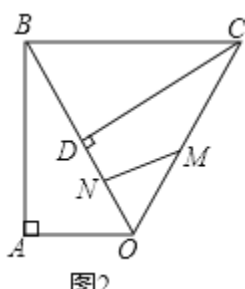
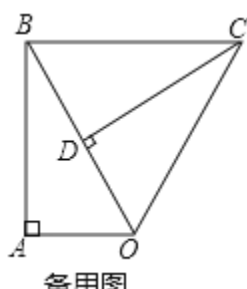


图2



备用图

【分析】(1) 只要证明 $\triangle OBC$ 是等边三角形即可;

(2) 求出 $\triangle AOC$ 的面积, 利用三角形的面积公式计算即可;

(3) 分三种情形讨论求解即可解决问题: ①当 $0 < x \leq \frac{8}{3}$ 时, M 在 OC 上运动, N 在 OB 上运动, 此时过点 N 作 $NE \perp OC$ 且交 OC 于点 E. ②当 $\frac{8}{3} < x \leq 4$ 时, M 在 BC 上运动, N 在 OB 上运动.

③当 $4 < x \leq 4.8$ 时, M、N 都在 BC 上运动, 作 $OG \perp BC$ 于 G.

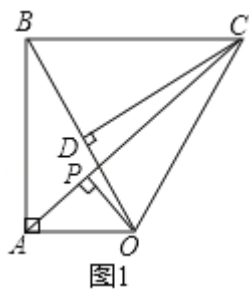
【解答】解：（1）由旋转性质可知：OB=OC， $\angle BOC=60^\circ$ ，

$\therefore \triangle OBC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle OBC=60^\circ$ ．

故答案为 60．

（2）如图 1 中，



$\because OB=4$ ， $\angle ABO=30^\circ$ ，

$\therefore OA=\frac{1}{2}OB=2$ ， $AB=\sqrt{3}OA=2\sqrt{3}$ ，

$\therefore S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2} \cdot OA \cdot AB=\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ ，

$\because \triangle BOC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle OBC=60^\circ$ ， $\angle ABC=\angle ABO+\angle OBC=90^\circ$ ，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2\sqrt{7}$ ，

$\therefore OP=\frac{2S_{\triangle AOB}}{AC}=\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$ ．

（3）①当 $0 < x \leq \frac{8}{3}$ 时，M 在 OC 上运动，N 在 OB 上运动，此时过点 N 作 $NE \perp OC$ 且交 OC 于点 E．

则 $NE=ON \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ ，

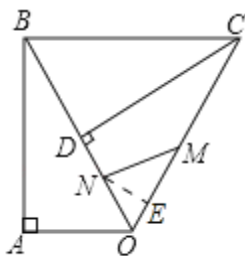


图2

$$\therefore S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot NE = \frac{1}{2} \times 1.5x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\therefore y = -\frac{3\sqrt{3}}{8}x^2.$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{8}{3} \text{ 时, } y \text{ 有最大值, 最大值} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

②当 $\frac{8}{3} < x \leq 4$ 时, M 在 BC 上运动, N 在 OB 上运动.

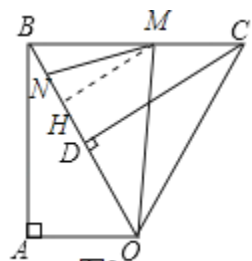


图3

作 $MH \perp OB$ 于 H. 则 $BM = 8 - 1.5x$, $MH = BM \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(8 - 1.5x)$,

$$\therefore y = \frac{1}{2} \times ON \times MH = -\frac{3\sqrt{3}}{8}x^2 + 2\sqrt{3}x.$$

当 $x = \frac{8}{3}$ 时, y 取最大值, $y < \frac{8\sqrt{3}}{3}$,

③当 $4 < x \leq 4.8$ 时, M、N 都在 BC 上运动, 作 $OG \perp BC$ 于 G.

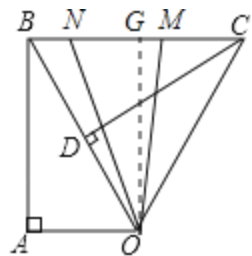


图4

$$MN = 12 - 2.5x, \quad OG = AB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot OG = 12\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2}x,$$

当 $x=4$ 时, y 有最大值, 最大值 $=2\sqrt{3}$,

综上所述, y 有最大值, 最大值为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

【点评】本题考查几何变换综合题、30 度的直角三角形的性质、等边三角形的判定和性质、三角形的面积等知识, 解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题, 属于中考压轴题.